

1-0 邻域与函数语言

第一章 函数与极限



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 局部语言:邻域与去心邻域
- 2 先修工具衔接
- 3 本讲小结与展望

局部语言：点附近的精确描述

PART 1

高中视角(全局):

- 关注函数的整体定义域、值域;
- 讨论整个区间上的单调性与最值, 例如 $1 < x < 5$ 。

大学视角(微观局部):

- 研究自变量“无限趋近某一点 a ”时的趋势;
- 关注点 a 周围的微小范围: $|x - a| < \delta$;
- 这个范围以 a 为中心, 关于 a 对称分布。

核心认知支架

高等数学第一门崭新的数学语言:

邻域 (Neighborhood)

它专门用于严格刻画:

“在点 a 的附近”

为极限与连续性奠定严格集合基石。

定义: 设 $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$, 开区间

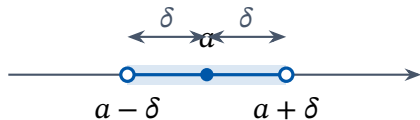
$$(a - \delta, a + \delta)$$

称为点 a 的 δ -邻域, 记作 $U(a, \delta)$:

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

三大几何要素:

- 中心: 点 a (对称中心);
- 半径: $\delta > 0$ (允许误差范围);
- 开区间: 不含端点 $a \pm \delta$ 。



绝对值不等式与区间的转换:

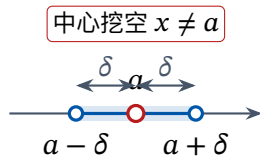
$$|x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$$

定义: 在 $U(a, \delta)$ 中去掉中心点 a , 记为 $\dot{U}(a, \delta)$:

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

几何上即两边对称开区间的并:

$$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta).$$



微积分核心认知

极限过程 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 只关心自变量在点 a 附近的
变化趋势, 完全不要求 $f(x)$ 在点 a 处有
定义!

当自变量只能从一侧趋近 a 时(如开区间端点或分段点), 需要单侧邻域:

■ 左邻域:

$$U^-(a, \delta) = (a - \delta, a) = \{x \mid a - \delta < x < a\}$$

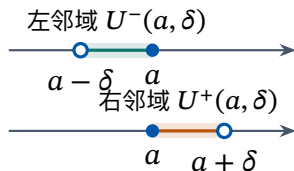
对应左极限 $x \rightarrow a^-$;

■ 右邻域:

$$U^+(a, \delta) = (a, a + \delta) = \{x \mid a < x < a + \delta\}$$

对应右极限 $x \rightarrow a^+$ 。

关系: $\dot{U}(a, \delta) = U^-(a, \delta) \cup U^+(a, \delta)$ 。



先修工具：为微积分扫清障碍

PART 2

性质	数学表述	微积分考点与陷阱
有界性	$\exists M > 0, \forall x \in X, f(x) \leq M$	必须指明数集 X (如 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 无界但在 $[1, 2]$ 有界)
单调性	$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$	导数符号判定 ($f' > 0$ 增, $f' < 0$ 减); 极值点判定
奇偶性	定义域对称: $f(-x) = \pm f(x)$	对称区间定积分速算 (奇函数积分为 0, 偶函数倍积)
周期性	$\exists T > 0, f(x + T) = f(x)$	周期函数定积分在任意长度为 T 的区间上积分值恒定

复合机制: 设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 则复合函数记为 $y = f(g(x))$ 。

成立前提: 内层值域与外层定义域交集非空:

$$R_g \cap D_f \neq \emptyset.$$

后续微积分映射 (链式法则)

求导核心公式: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 。

求导前必须能够由外到内逐层分解!

分层分解实战速查:

复合函数	外层	内层
$y = \sin(2x + 1)$	$y = \sin u$	$u = 2x + 1$
$y = e^{-x^2}$	$y = e^u$	$u = -x^2$
$y = \ln(\cos x)$	$y = \ln u$	$u = \cos x$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$y = \sqrt{u}$	$u = 1 - x^2$

核心认知:周期函数全域无逆! 必须在**单调主值区间**截断后定义反函数。

函数	定义域	主值区间 (值域)	奇偶性
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	奇函数
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	非奇非偶
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	奇函数
$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$	非奇非偶

注意:主值陷阱

$\arcsin(\sin x) = x$ 仅当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 成立!

例如 $x = \frac{3\pi}{4}$ 时:

$$\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}!$$

本讲小结：开启微积分之旅

PART 3

语言体系升级

- 邻域 $U(a, \delta)$: 点附近对称开区间;
- 去心邻域 $\dot{U}(a, \delta)$: 极限观察室;
- 单侧邻域 $U^{\pm}(a, \delta)$: 分段讨论利器;
- 复合与反三角: 掌握分解链与主值。

后续课程映射

- 1-1 数列极限: ε - N 语言;
- 1-2 函数极限: ε - δ 邻域语言;
- 1-7 连续性: 极限值等于点函数值;
- 第二章导数: 去心邻域内增量比极限。

附录中备有常见初等数学公式手册, 供课后自学查阅!

先修公式备览

PART 4

自学查阅指南(课上不占用学时)

大学微积分并不是重新学一遍高中数学,而是在已有函数工具上研究极限、导数和积分。

下列公式均为先修阶段接触过、但在大学课程中仍会反复使用的内容。遇到例题或练习时,可把本备览作为公式索引查阅。

- **定位说明:** 本附录作为电子工具手册供课后随时检索,课堂不展开逐项推演;
- **重点工具:** 尤其要熟悉绝对值、根式、指数对数、三角函数与反三角函数;
- **后续应用:** 后续求极限、求导、积分时都会频繁使用这些恒等变形。

绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$$|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \quad |xy| = |x||y|.$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

三角不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

与邻域的联系

$$|x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta.$$

注意:常用变形

$|x - a| > \delta$ 表示 $x < a - \delta$ 或 $x > a + \delta$; $0 < |x - a| < \delta$ 表示在 a 的邻域中去掉点 a 。

平方与立方

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

常用因式分解

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

根式有理化

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{A - B}.$$

指数运算

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

对数运算 ($a > 0, a \neq 1$)

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^b = b \log_a x.$$

注意: 大学常用形式

自然对数 $\ln x = \log_e x$; 换底公式为

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

倒数与商

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

同角关系

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

诱导公式要旨

- 奇变偶不变；
- 符号看象限。

例如

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x.$$

和差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \\ &\mp \sin \alpha \sin \beta,\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

倍角公式

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x, \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.\end{aligned}$$

降幂公式

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}.\end{aligned}$$

和差化积

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2},$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}.$$

积化和差

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)],$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)],$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)].$$

这些公式在后续三角积分中经常使用。

函数	定义域	主值区间
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$

注意: 主值区间选取限制

反三角函数不是三角函数在整个定义域上的反函数, 而是取某个单调分支后得到的反函数。因此要特别注意主值区间。

互逆关系

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad |x| \leq 1,$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad |x| \leq 1,$$

$$\tan(\arctan x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

反向使用时必须注意主值区间, 例如

$$\arcsin(\sin x) = x$$

只在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时成立。

互补关系

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leq 1,$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

负值关系

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x.$$

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。