

# 1-1 数列的极限

## 第一章 函数与极限



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 数列的概念
- 2 数列极限的定义
- 3 定义证明实战
- 4 收敛数列的核心性质
- 5 极限运算法则与计算
- 6 课堂巩固与思维辨析
- 7 本讲小结与展望

# 数列的概念

PART 1

**定义:**按照正整数顺序排列的无穷多个数  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  称为**数列**, 简记为  $\{x_n\}$ 。

**基本概念:**

- **项:**数列中的每个数  $x_n$
- **通项:**第  $n$  项的解析表达式  $x_n = f(n)$
- **下标:**项的序号  $n \in \mathbb{N}^+$

## 离散函数视角

数列是定义在正整数集上的特殊函数:

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n$$

自变量取正整数, 图像是一群离散孤立的点。

## 有界性:

- 若  $\exists M > 0, \forall n$  有  $|x_n| \leq M$ , 称  $\{x_n\}$  有界;
- 否则称为**无界**;
- 等价于界在  $[-M, M]$  区间内。

## 单调性:

- 单调递增:  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$
- 单调递减:  $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$
- 严格单调: 各项严格不等。

### 典型特例观察

- $x_n = \frac{1}{n}$ : 单调递减且有界 ( $0 < x_n \leq 1$ );
- $x_n = (-1)^n$ : 有界 ( $|x_n| \leq 1$ ), 但**不单调** (正负交替震荡);
- $x_n = 2^n$ : 单调递增, 但**无界**。

**定义:**在  $\{x_n\}$  中任意抽取无穷多项保持先后次序组成的新数列  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  称为**子列**, 记作  $\{x_{n_k}\}$ , 指标满足:  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \implies n_k \geq k$ 。

**经典划分——奇偶子列:**

■ 奇数项子列:  $\{x_{2k-1}\} = \{x_1, x_3, x_5, \dots\}$

■ 偶数项子列:  $\{x_{2k}\} = \{x_2, x_4, x_6, \dots\}$

**并集全覆盖:**奇偶子列合起来恰好覆盖原数列所有项。

## 核心判据(预告)

数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$  的充要条件是:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a.$$

若奇偶子列极限不同, 原数列必发散!

# 数列极限的定义

PART 2

## 历史与直观源泉：

- **割圆术**(刘徽):“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣。”
- **庄子**:“一尺之棰,日取其半,万世不竭。”  
通项  $x_n = (\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$ 。

## 动态趋势观察：

- $x_n = \frac{n}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\} \rightarrow 1$
- $y_n = (-1)^n \frac{1}{n} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\} \rightarrow 0$

### 题:思考

数 列  $z_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$  是否趋于某个确定常数?

## 数列极限定义 (Cauchy-Weierstrass $\varepsilon$ - $N$ 语言)

设  $\{x_n\}$  为数列,  $a$  为常数. 若对任意给定正数  $\varepsilon > 0$ , 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

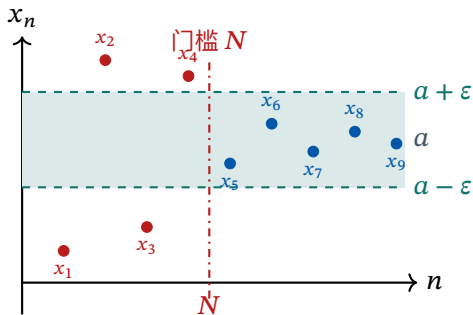
则称常数  $a$  是数列  $\{x_n\}$  的**极限** (或数列  $\{x_n\}$  **收敛于**  $a$ ), 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 若不存在这样的  $a$ , 称数列**发散**.

## 量词逻辑结构

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

## 几何开邻域语言

当  $n > N$  时, 所有项  $x_n$  全部落在  $a$  的开邻域  $U(a, \varepsilon)$  之内!



## 核心特征剖析:

- **动态博弈机制:**你给任意精度的误差  $\varepsilon$  (挑战者出招); 我必能找出临界项数  $N$  (应战者接招)。
- **$N$  与  $\varepsilon$  的依从性:** $N$  一般依赖于  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  越小,  $N$  通常越大。
- **有限与无限:**带外  $U(a, \varepsilon)$  之外的点**至多只有有限个**; 带内包含了**无穷多个项**。

# 定义证明实战

PART 3

## 题: 典型例题

■ 设数列  $x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

### 分析法寻 $N$ (草稿反向推导)

计算误差绝对值表达式:

$$|x_n - 1| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 欲使  $|x_n - 1| < \varepsilon$ :

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

### 课堂互动与设问思考

思考与设问:

- 门槛  $N$  必须是**正整数**;
- 若算得  $\frac{1}{\varepsilon} = 100.2$ , 门槛  $N$  怎么取?
- $\implies$  取下取整  $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$  即可!

**请大家在草稿纸上试写三步规范证明。**

## 三步规范证明书写

证明:

1. 取门槛:  $\forall \varepsilon > 0$ , 取正整数  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ ;
2. 验条件: 当  $n > N$  时, 必有  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ;
3. 算误差: 从而恒有

$$|x_n - 1| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

由数列极限定义,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1$ . ■

## 注意: 定义证明避坑指南

书写标准范式:

- “任给  $\varepsilon > 0$ ”不能遗漏;
- “存在  $N$ ”必须指明具体构造;
- 推导过程留在草稿纸上, 卷面直接“取  $N = \dots$ ”。

## 题: 经典核心定理

- 设常数  $0 < |q| < 1$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ 。

### 草稿纸分析 (对数反向解不等式)

任给  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 欲使  $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ 。  
两端取以  $e$  为底的自然对数:

$$n \ln |q| < \ln \varepsilon$$

**极易踩坑点:** 因  $0 < |q| < 1$ , 故  $\ln |q| < 0$   
为**负数**!

### 破题关键与门槛 $N$ 锁定

同除以负数, 不等号反向:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}.$$

故只需取正整数门槛:

$$N = \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \right\rfloor$$

即可保证当  $n > N$  时误差小于  $\varepsilon$ 。

### 严格证明规范书写

证明:

1. 任给  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 取正整数  $N = \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \right\rfloor$ ;
2. 当  $n > N$  时, 必有  $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ ;
3. 两端同乘负数  $\ln |q|$ , 不等号反向得:

$$n \ln |q| < \ln \varepsilon \implies |q|^n < \varepsilon.$$

由数列极限定义,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . ■

### 定义证明核心精髓

存在即可, 无需最小:

- $\varepsilon$ - $N$  语言的核心是**证明门槛存在**;
- 绝不要求求出最小的  $N$ ;
- 实际解题中, 寻找  $N$  时可以大胆适当**放大放缩**, 化繁为简!

# 收敛数列的核心性质

PART 4

## 定理(极限唯一性)

若数列  $\{x_n\}$  收敛, 则它的极限是唯一的。

**反证法证明思路:** 假设有两个不同极限  $a \neq b$  (间距  $|a - b| > 0$ ):

1. 取不相交半径:  $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$ ;

2. 由定义,  $\exists N_1, N_2$  使得:

- $n > N_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon$ ;
- $n > N_2 \implies |x_n - b| < \varepsilon$ .

3. 令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 当  $n > N$  时:

$$\begin{aligned}|a - b| &\leq |x_n - a| + |x_n - b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = |a - b|.\end{aligned}$$

4. 导出矛盾  $|a - b| < |a - b|$ ! 故极限必唯一。 ■

### 定理(收敛必有界)

若数列  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  一定是有界数列。

### 证明思想(分段取大)

1. 取  $\varepsilon = 1$ 。由收敛性,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时:  $|x_n| \leq |a| + 1$ ;
2. 对有限的前  $N$  项, 令:

$$M = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a| + 1\}$$

3. 则对所有  $n$ , 恒有  $|x_n| \leq M$ 。 ■

### 逆命题不成立!(高频考点)

有界数列不一定收敛!

- 经典反例:  $x_n = (-1)^n$
- 满足  $|x_n| \leq 1$  (有界), 但正负交替震荡发散。

有界是收敛的必要非充分条件。

## 性质三:保号性

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ , 则  $\exists N$ , 当  $n > N$  时恒有:

$$x_n > 0 \quad \left( \text{甚至 } x_n > \frac{a}{2} \right).$$

**推论(非严格保号):** 若  $x_n \geq 0$  且  $\lim x_n = a$ , 则  $a \geq 0$ 。

(极限可能取等号, 如  $\frac{1}{n} > 0 \rightarrow 0$ )

## 性质四:子列同收敛

若数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 则其**任何子列**  $\{x_{n_k}\}$  也必收敛于同一极限  $a$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a.$$

**发散判据:**

- 找到一个子列发散;
- 或找到两子列极限不同  $\implies$  发散!

## 抢答挑战:辨别下列命题的正误并说明理由

深入理解唯一性、有界性、保号性与子列性质的内在逻辑:

### 辨析一:保号性的等号松弛陷阱

**命题:**若数列恒有  $x_n > 0$  且  $\lim x_n = a$ , 是否必能推出  $a > 0$ ?

× **错误!**

- 极限过程具有**等号松弛性**;
- 结论只能保证极限  $a \geq 0$ ;
- **经典反例:**  $x_n = \frac{1}{n} > 0$ ,  
但极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \not> 0$ .

### 辨析二:子列收敛与全列收敛

**命题:**若奇数项子列与偶数项子列均收敛, 全数列是否必收敛?

× **错误!**

- 两子列必须收敛且**极限相等**;
- 极限若不同, 全数列交替摆动发散;
- **经典反例:**  $x_n = (-1)^n$ ,  
奇项趋于  $-1$ , 偶项趋于  $1$ .

# 极限运算法则与计算

PART 5

## 四则运算法则

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

## 重要常用推论

- 常数提外:  $\lim(C \cdot x_n) = C \cdot \lim x_n$
- 乘方可换:  $\lim(x_n^k) = (\lim x_n)^k$
- 基础砖石:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{n^k} = 0 \quad (k > 0)$

## 注意: 法则生效前提 (避坑)

拆分运算法则成立的前提是: **参与运算的每个数列极限都必须存在!**

严禁对未收敛数列随意拆项, 例如  $(n) + (-n) = 0$  不能拆为  $\infty - \infty$ !

典型例题解析: 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{5n^2 - 4n + 3}$ 。

解: 分子分母同除以最高次幂  $n^2$ :

$$\frac{2n^2 + 3n - 1}{5n^2 - 4n + 3} = \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}.$$

利用四则运算及  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ :

$$\text{原式} = \frac{2 + 0 - 0}{5 - 0 + 0} = \frac{2}{5}.$$

## 多项式分式一般规律

设  $P(n) = a_k n^k + \dots$ ,  $Q(n) = b_m n^m + \dots$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}, & k = m \text{ (同次幂)} \\ 0, & k < m \text{ (分母高)} \\ \infty, & k > m \text{ (分子高)} \end{cases}$$

**解题真诀:** 只看最高次项, 低阶全放掉!

## 题: 典型计算题

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$ 。

分子有理化(消除根号差):

$$\sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}.$$

分子分母同除以最高次项  $n$ :

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{2}.$$

## 根式差解题通法

遇“ $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ ”未定式:

1. 分子有理化: 乘共轭根式;
2. 化简分子: 抵消最高阶项;
3. 抓大放小: 同除以最高次幂。

# 课堂巩固与思维辨析

PART 6

## 题：概念辨析

下列关于数列极限的陈述中, **错误**的是( )

- A. 若  $\lim x_n = a$ , 则  $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = a$     B. 若  $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = a$ , 则  $\lim x_n = a$
- C. 若  $\lim x_n = a$ , 则  $\lim x_{3n} = \lim x_{3n+1} = a$     **D. 若  $\lim x_{3n} = \lim x_{3n+1} = a$ , 则  $\lim x_n = a$**

## 选项析取与正误判定

**正确答案: D**

- **A & C 正确**: 任何子列均同极限;
- **B 正确**:  $2n$  与  $2n+1$  覆盖全序列;
- **D 错误**: 遗漏了子列  $\{x_{3n+2}\}$ !

## 反例构造(D项漏洞)

令  $x_n = 1$  (当  $n = 3k + 2$ ), 其余为 0。则  $x_{3n} \rightarrow 0, x_{3n+1} \rightarrow 0$ , 但原数列  $\{0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots\}$  发散!

### 题:概念探究

数列  $x_n = \sin n$  是否收敛? 为什么?

1. **有界性:**  $|\sin n| \leq 1$  恒成立, 数列有界;
2. **发散性(反证):** 若  $\lim \sin n = A$ , 由积化和差:  $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \cos n \sin 1$ , 极限得  $\cos n \rightarrow 0$ , 与  $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$  矛盾!

### 认知跃迁

$\{\sin n\}$  是有界但终生震荡发散的典型代表。

牢记:

收敛  $\implies$  有界

有界  $\nRightarrow$  收敛!

# 本讲小结与展望

PART 7

### 核心理论框架

- $\varepsilon$ - $N$  语言:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon$ ;
- 四大性质: 唯一性、有界性、保号性、子列收敛性;
- 子列发散判据: 子列不同极限  $\implies$  原数列必发散。

### 计算与解题方法

- 定义证明: 放缩法找  $N(\varepsilon)$ ;
- 有理分式: 分子分母同除最高次幂;
- 根式相减: 平方差分子有理化;
- 四则法则: 必须确认各部极限均存在。

下节预告: 1-2 函数的极限 ( $\varepsilon$ - $\delta$  语言全面展开)

## 在线主页与课程资源

### ■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

### ■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

### ■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

## 思考: Questions & Answers

**“学贵善疑, 逻辑筑基”**

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

**现在进入自由提问与交流时间。**