

1-2函数的极限

第一章函数与极限



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 认知跃迁:从数列到函数
- 2 自变量趋向无穷大的极限
- 3 自变量趋向有限点的极限
- 4 左右极限(单侧极限)
- 5 函数极限的性质
- 6 课堂巩固与思维辨析
- 7 本讲小结与展望

认知跃迁：从数列到函数

PART 1

数列极限 (整点离散点列)

- 自变量 $n \in \mathbb{N}^+$ 沿整数轴单向奔向无穷;
- 趋向方式**单一**: 只能 $n \rightarrow \infty$;
- 项与项之间是**离散跳跃**的, 无中间连续取值。

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

函数极限 (实数连续流动)

- 自变量 $x \in \mathbb{R}$ 在连续实数轴上任意滑移;
- 趋向方式**丰富多样**:
 - 无穷趋向:
 $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$
 - 有限趋向:
 $x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-$
- 自变量是**连续逼近**, 变化动态细密。

认知跃迁: 从“定格跳跃胶片”升级为“流畅连续画卷”, 探寻变量在极微尺度下的动态演化!

范式一： $x \rightarrow \infty$ (全局无穷趋向)

研究自变量奔向无穷远时，函数曲线是否贴近水平基准线。

- $x \rightarrow +\infty$ (正向右端渐近线)
- $x \rightarrow -\infty$ (负向左端渐近线)
- $x \rightarrow \infty$ (即模长 $|x| \rightarrow +\infty$)

典型直观： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

范式二： $x \rightarrow x_0$ (局部微观显微)

研究自变量在有限点 x_0 附近时，函数值的聚拢趋势。

- 双侧趋近： $x \rightarrow x_0$
- 单侧趋近：左极限 $x \rightarrow x_0^-$ 、右极限 $x \rightarrow x_0^+$
- 核心特征：只看周围，不问该点！

典型直观： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ 。

自变量趋向无穷大的极限

PART 2

函数极限定义 ($x \rightarrow \infty$)

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义。若对任给 $\varepsilon > 0$, 总存在正数 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的**极限**, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 。

分侧符号与方向:

■ $x \rightarrow +\infty$: 当 $x > X$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

■ $x \rightarrow -\infty$: 当 $x < -X$ 时,
 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

等价充要定理:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \end{cases}$$

几何直观: 对应函数图像在两端的水平渐近线 $y = A$ 。

题: 典型例题

■ 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

分析法寻门槛 X (草稿反推)

任给 $\varepsilon > 0$, 欲使误差绝对值小于 ε :

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \quad (x > 0)$$

解关于自变量 x 的不等式:

$$x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

课堂互动与门槛确定

思考与设问:

- 连续变量 $x \rightarrow +\infty$ 需要门槛 X 为正实数;
- 是否需要取整? **不需要!** 实数界限直接取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ 即可。

请大家尝试在草稿纸上写出规范三步证明。

三步规范证明书写

证明:

1. **取门槛**: 任给 $\varepsilon > 0$, 取实数 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$;
2. **验条件**: 当 $x > X$ 时, 必有 $x > \frac{1}{\varepsilon}$;
3. **算误差**: 从而恒有

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

由定义, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。 ■

方法通性与心法

数列与函数同构性:

- 数列 $n \rightarrow \infty$: 离散步进, 寻找正整数门槛 $N \in \mathbb{N}^+$;
- 函数 $x \rightarrow +\infty$: 连续滑行, 寻找实数界限 $X \in \mathbb{R}^+$;
- 两者底层逻辑完全一致!

自变量趋向有限点的极限

PART 3

函数极限严密定义 (Cauchy ε - δ 语言)

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta_0)$ 内有定义。若对任给 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的**极限**, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

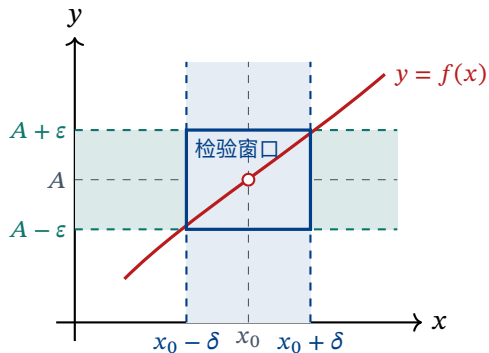
精确量词表述

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t.}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

去心不等式核心内涵

绝不考虑 $x = x_0$ 处的点函数值! $f(x_0)$
有无定义、值为何, 与极限是否存在**完全无关**。



直观几何意象

- 任给以水平线 $y = A$ 为中心、宽为 2ε 的水平横带；
- 必能找到以 x_0 为中心、宽为 2δ 的竖直窄带；
- 使得在这两带交织的矩形检验窗内，曲线除了 (x_0, A) 点本身外，**完全被囚禁在水平横带之中！**

题: 典型例题

证明: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ 。

分析法寻 δ (因式分解草稿)

任给 $\varepsilon > 0$, 欲使误差绝对值小于 ε :

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

因在去心邻域内 $x \neq 1$, 约分化简:

$$\left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1|$$

只需 $|x - 1| < \varepsilon$!

课堂互动与破题关键

思考与设问:

- 误差项 $|f(x) - 2|$ 恰好等于自变量距离 $|x - 1|$;
- 邻域半径 δ 应该取多少?
- $\implies$ 直接取 $\delta = \varepsilon > 0$ 即可!

请大家在草稿纸上尝试写出规范证明。

规范证明书写

证明:

1. 取半径: 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$;
2. 验条件: 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有 $x \neq 1$;
3. 算误差: 从而恒有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon.$$

由定义, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ 。 ■

哲学反思: 去心邻域的威力

无定义但有极限:

- 函数在 $x = 1$ 处原本没有定义 (分母为 0);
- 但极限安然存在且等于 2;
- 这正是极限研究“无限逼近而
不等于”的独特魅力!

左右极限（单侧极限）

PART 4

左极限 ($x \rightarrow x_0^-$)

x 从 x_0 的左侧 ($x < x_0$) 逼近:

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - A| < \varepsilon_0$.

右极限 ($x \rightarrow x_0^+$)

x 从 x_0 的右侧 ($x > x_0$) 逼近:

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon_0$.

充要定理与判别准则

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ (左右极限必须各自存在且数值相等)

题: 典型例题

- 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 1 \\ x-2, & x < 1 \end{cases}$, 讨论 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在。

分侧独立计算:

- 右极限 ($x > 1$):

$$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2;$$

- 左极限 ($x < 1$):

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1.$$

结论推断

两单侧极限不相等:

$$f(1^+) = 2 \neq -1 = f(1^-).$$

由单侧极限充要定理:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ 极限不存在!}$$

几何直观: 图像在 $x = 1$ 处断开并发生跃变, 形成落差为 3 的断崖。

解题关键: 何时必须分左右两侧讨论?

在求解极限时, 若遇到以下三类结构, **必须先分别求左右极限**:

1. 分段分界点

函数在分界点两侧公式不同:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0 \\ f_2(x), & x < x_0 \end{cases}$$

2. 绝对值开方

含有 $|x|$ 或 $\sqrt{x^2}$ 结构:

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies \frac{|x|}{x} = +1; \\ x < 0 &\implies \frac{|x|}{x} = -1. \end{aligned}$$

3. 指数与反三角

含有 $e^{1/x}$ 或 $\arctan \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} e^{+\infty} &= +\infty, \\ e^{-\infty} &= 0. \end{aligned}$$

题: 思维探究

讨论极限 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x}$ 是否存在?

分侧单侧极限剖析

■ 当 $x \rightarrow 0^+$ (右侧正向逼近):

$$\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty;$$

■ 当 $x \rightarrow 0^-$ (左侧负向逼近):

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0.$$

深度洞察与后继脉络

右侧趋向 $+\infty$, 左侧贴近水平线 0。左右极限天差地别:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} \text{ 极限不存在!}$$

后继脉络:

在 1-7 节研究连续性与间断点时, 该函数在 $x = 0$ 处即为最典型的**无穷间断点**。

函数极限的性质

PART 5

1. 局部唯一性与有界性

- **局部唯一性**: 若极限存在, 其值必然**唯一**;
- **局部有界性**: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则在某去心邻域内 $f(x)$ 有界。

2. 局部保号性与保序性

- **局部保号性**: 若 $A > 0$, 则在某去心邻域内恒有 $f(x) > 0$;
- **保序性**: 若去心邻域内 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\lim f(x) \leq \lim g(x)$ 。

注意: 警惕“局部”前提

所有有界性、保号性结论均冠有“**局部**”二字, 只在 x_0 充分小去心邻域内成立, 绝不代表在整个定义域上有界!

四则运算法则

设 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则:

- $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;
- $\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (要求 $B \neq 0$).

推论: $\lim[c \cdot f(x)] = c \lim f(x)$.

复合函数极限运算法则

设复合函数 $y = f(g(x))$.

- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$;
- 且 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = L$;
- 并在去心邻域内满足 $g(x) \neq u_0$;

则复合极限可逐层代入:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = L.$$

核心疑问：为什么必须要求 $g(x) \neq u_0$ 或 $f(u)$ 连续？

若外层函数 $f(u)$ 在 u_0 处不连续，且内层 $g(x)$ 恒等于 u_0 ，直接换元将产生严重谬误！

经典反例构造

内层为常值函数： $g(x) \equiv 0$ ；

外层在原点具有孤立断点：

$$f(u) = \begin{cases} 0, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}$$

分别考查单层极限：

- 内层： $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = u_0$ ；
- 外层： $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0 = L$ 。

法则失效与矛盾剖析

计算复合极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ ：

- 因 $g(x) \equiv 0$ ，恒有
 $f(g(x)) = f(0) = 1$ ；
- 真实复合极限为：

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \mathbf{1} \neq L = \mathbf{0}!$$

- **核心启示：** $g(x) \neq u_0$ 确保避开孤立断点！

课堂巩固与思维辨析

PART 6

题：概念辨析题

“函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义”是“极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在”的 ()

- A. 充分必要条件 B. 充分但非必要条件
C. 必要但非充分条件 **D. 既非充分也非必要条件**

维度一：有定义 $\Rightarrow$ 极限存在

- 狄利克雷函数 $D(x)$ 处处有定义，但处处极限不存在；
- 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 在 0 处有定义，但左右极限不相等。

维度二：极限存在 $\Rightarrow$ 有定义

- 如 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义；
- 但 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ 完好存在。

正确答案：**D**

题:计算实战

求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + 3x - 4}.$

常规解法(同除 x^2)

分子分母同除以最高次幂 x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

抓大放小系数法则

分子分母均为二次多项式(同阶):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_2 x^2 + \dots}{b_2 x^2 + \dots} = \frac{a_2}{b_2}.$$

直接读取最高次项系数比 $\frac{1}{2}$!

本讲小结与展望

PART 7

核心理论基石

- **两类趋向**: $x \rightarrow \infty$ (全局) 与 $x \rightarrow x_0$ (局部);
- **语言体系**: ε - X 与 ε - δ ;
- **去心核心**: $0 < |x - x_0| < \delta$, 与该点无关;
- **单侧充要**:
 $\lim = A \iff f(x_0^-) = f(x_0^+) = A。$

解题方法与避坑

- **定义证明**: 去心因式约分, 寻找 $\delta(\varepsilon)$;
- **分段函数**: 分界点必分别计算左右极限;
- **有理分式**: 最高次幂同除法 (抓大放小);
- **局部性质**: 保号与有界必须注明局部邻域。

下节预告: 1-3 无穷小与无穷大 (微积分的核心阶梯)

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。