

1-3 无穷小与无穷大

第一章 函数与极限



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 无穷小:极限为零的动态变量
- 2 无穷大:绝对值无限增大的变量
- 3 无穷小与无穷大的内在联系
- 4 无穷小与极限的等价分解
- 5 无穷小的运算性质与运算法则
- 6 课堂巩固与思维辨析
- 7 本讲小结与考点思维导图

无穷小：极限为零的动态变量

PART 1

无穷小的本质定义

若函数 $f(x)$ 在某一极限过程中以 0 为极限, 即 $\lim f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为该过程中的无穷小量。

多维过程体现:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (有限点局部无穷小);
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (无穷远处衰减无穷小);
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (整点离散无穷小数列)。

两大认知误区警示

- 误区一: 无穷小是“极小的常数”。
错! 无穷小是动态趋向 0 的变量。
- 误区二: 常数不能是无穷小。
错! 常数 0 是唯一的常数无穷小。

几何直观: 曲线无限贴近平衡线 $y = 0$ 。

核心准则:过程决定属性

一个函数是否为无穷小, **完全取决于自变量的趋向过程**。脱离过程空谈无穷小毫无意义!

常见基本初等函数表现:

- 当 $x \rightarrow 0$ 时:
 $x, \sin x, \ln(1+x), e^x - 1$ 是无穷小;
- 当 $x \rightarrow \infty$ 时: $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ 是无穷小;
- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时: e^{-x} 是无穷小。

案例剖析: $f(x) = x^2$ 的多重身份

考查同一解析式在不同过程中的演化:

- $x \rightarrow 0$ 时: $x^2 \rightarrow 0 \implies$ **无穷小**;
- $x \rightarrow 1$ 时: $x^2 \rightarrow 1 \implies$ **常态变量 (极限为 1)**;
- $x \rightarrow \infty$ 时: $x^2 \rightarrow +\infty \implies$ **无穷大**。

心法口诀: 过程变, 属性变; 解题必须指明过程!

典型例题: 判断下列函数在指定过程中是否为无穷小

函数式	极限过程	极限计算 $\lim f(x)$	是否为无穷小
$f(x) = x^2 - x$	$x \rightarrow 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) = 0$	✓ 是无穷小 (极限为 0)
$f(x) = x^2 - 1$	$x \rightarrow 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$	✓ 是无穷小 (极限为 0)
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	$x \rightarrow 2$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$	× 否 (是无穷大)
$f(x) = \frac{2x+1}{x}$	$x \rightarrow \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$	× 否 (极限非零)

判定黄金法则: 只需计算该过程下的极限值: 恰好等于 0 则是, 否则绝非无穷小!

无穷大：绝对值无限增大的变量

PART 2

无穷大精确定义 (M - δ 语言)

设 $f(x)$ 在 x_0 去心邻域内有定义。若对任给 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有

$$|f(x)| > M,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为**无穷大**, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

符号方向与本质警示

分侧方向符号:

■ 正无穷大:

$$f(x) > M \implies \lim f = +\infty;$$

■ 负无穷大:

$$f(x) < -M \implies \lim f = -\infty;$$

■ ∞ 兼指绝对值 $|f(x)| > M$.

哲学本质: 无穷大是无界增长趋势, 非确定数值。“极限是无穷大”实质是**极限不存在(发散)**!

概念严格区分

- **无穷大**: 随着趋近, 在**所有点处**的绝对值最终**全线超越**任意给定的 M ;
- **无界变量**: 在邻域内**至少存在一些点**的绝对值能超越 M 。

无穷大 $\implies$ 无界变量

无界变量 $\not\implies$ 无穷大

经典反例: $f(x) = x \sin x$ ($x \rightarrow +\infty$)

- 取 $x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时,
 $f(x_k) = x_k \rightarrow +\infty$ (**无界!**);
- 但取 $x_n = n\pi$ 时, $f(x_n) = 0$ (频繁跌回 0 点!);
- 无法保证所有充分大 x 恒有 $|f(x)| > M$ 。

结论: $x \sin x$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时**无界但非无穷大!**

无穷小与无穷大的内在联系

PART 3

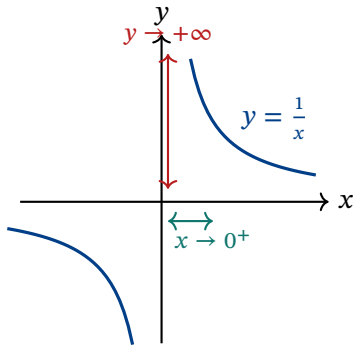
倒数互逆定理与转化战略

在同一个极限过程中:

1. $f(x)$ 是无穷小且 $f \neq 0 \iff \frac{1}{f(x)}$ 是无穷大;
2. $f(x)$ 是无穷大 $\iff \frac{1}{f(x)}$ 是无穷小。

解题战略: 证明“无穷大”困难时, 转而证明其**倒数极限为 0!**

量词对偶: $\varepsilon = \frac{1}{M} \iff M = \frac{1}{\varepsilon}$ 。



零邻域微观缩放 $\iff$ 空间无穷大延伸!

无穷小与极限的等价分解

PART 4

极限与无穷小充要等价定理

在自变量的同一趋向过程中, 极限 $\lim f(x) = A$ 的**充要条件**是:

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是该过程中的某一**无穷小量**(即 $\lim \alpha(x) = 0$)。

物理结构剖析:

- **主体** A : 恒定的目标值;
- **扰动** $\alpha(x)$: 衰减消亡的微观残差。

承前启后的枢纽作用

- **理论价值**: 将抽象的逼近过程转化为严密的**代数恒等式**;
- **导数微分渊源**: 后续在第二章定义微分:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

正是本定理的直观升华!

- **误差控制思想**: 在工程计算中, $f(x) \approx A$, 误差界由 $\alpha(x)$ 控制。

无穷小的运算性质与运算法则

PART 5

有限封闭运算法则

设 $\alpha(x), \beta(x)$ 为同一过程的无穷小:

1. 和差性质: $\alpha(x) \pm \beta(x)$ 仍是无穷小;
2. 乘积性质: $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ 仍是无穷小;
3. 数乘性质: $C \cdot \alpha(x)$ 仍是无穷小。

核心推论: 有限个无穷小的和与积仍为无穷小!

两大关键延伸警示

- **无限项陷阱:** 法则仅对有限项成立!
 n 个 $\frac{1}{n}$ 相加: $\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 \neq 0!$
- **商的未定型:** $\frac{\alpha}{\beta}$ 充满未知 ($\frac{0}{0}$ 型):
 $\frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0; \frac{x}{x} \rightarrow 1; \frac{x}{x^2} \rightarrow \infty$ 。
这正是 1-6 节“阶的比较”要研究的核心!

核心定理 (极高频解题利器)

若函数 $g(x)$ 在某一过程中**有界** ($|g(x)| \leq M$), 而 $\alpha(x)$ 是**无穷小**, 则:

$$\lim[g(x) \cdot \alpha(x)] = 0.$$

简明证明:任给 $\varepsilon > 0$, 存在邻域使

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ 从而 } |g(x)\alpha(x)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \blacksquare$$

注意: 严禁盲目拆分乘积极限

很多同学看到 $\lim[f(x)g(x)]$ 就想写成 $\lim f \cdot \lim g$ 。

必须两者极限均存在时才可拆! 若 $g(x)$ 如 $\sin \frac{1}{x}$ 振荡发散, 绝不能拆开算, 必须直接引用本定理!

典型例题: 振荡函数极限

求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ 。

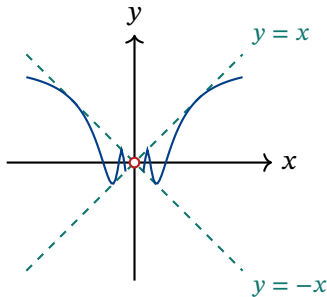
规范解答:

■ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 故 x 为无穷小;

■ 对任意 $x \neq 0$, $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 故 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界量;

由有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小定理:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$



振荡被两条包络线 $y = \pm x$ 死死扼杀在零点!

课堂巩固与思维辨析

PART 6

概念选择题

当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量中为无穷小量的是 ()

- A. $e^{1/x}$ B. $x \sin \frac{1}{x}$ C. $\frac{\sin x}{x}$ D. $\frac{1}{x} \sin x$

A / B 选项分析

- A. $e^{1/x}$: $x \rightarrow 0^+$ 趋于 $+\infty$; $x \rightarrow 0^-$ 趋于 0, 极限不存在;
- B. $x \sin \frac{1}{x}$: 无穷小 $\times$ 有界量, 极限为 0, 是无穷小。

C / D 选项分析与结论

- C. $\frac{\sin x}{x}$: 重要极限为 $1 \neq 0$;
- D. $\frac{1}{x} \sin x$: 同 C 项, 极限为 $1 \neq 0$ 。

正确答案: **B**

变式实战题

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列函数中为无穷大量的是 ()

- A. e^x **B. $\ln x$** C. $\sin \frac{1}{x}$ D. $\frac{\sin x}{x}$

选项逐项剖析

- A. $e^x: x \rightarrow 0^+$ 时 $e^0 = 1$, 为有限量;
- B. $\ln x: \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, **是无穷大**;
- C. $\sin \frac{1}{x}: [-1, 1]$ 间无限振荡, 有界发散;
- D. $\frac{\sin x}{x}$: 极限等于 1 (重要极限)。

考点辨析

无论是正无穷还是负无穷大:

$$f(x) \rightarrow -\infty \implies |f(x)| \rightarrow +\infty$$

其绝对值均超越任何大数, **均属无穷大!**
正确答案: **B**

综合计算题

求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$ 。

解析(因式分离法): 改写为因式相乘形式:

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \cos x.$$

■ 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小;

■ $|\cos x| \leq 1$ 恒成立, $\cos x$ 是有界量;

由定理即得: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ 。

秒杀模型总结

标准识别特征:

有界振荡因式 $\times$ 趋零衰减因式

常见有界因式:
 $\sin(\dots)$, $\cos(\dots)$, $\arctan(\dots)$ 等。

只要乘以无穷小, 整体极限**毫不犹豫直接写 0!**

本讲小结与考点思维导图

PART 7

三大核心概念与联系

- **无穷小**: 极限为 0 的变量 (0 是唯一常数无穷小);
- **无穷大**: 绝对值无限增大的变量 (本质是极限不存在);
- **倒数关系**: 非零无穷小 $\iff$ 无穷大;
- **极限分解**:
 $\lim f = A \iff f(x) = A + \alpha。$

运算性质与避坑心法

- **有限封闭**: 有限和、差、积仍为无穷小;
- **核心法宝**: 有界量 $\times$ 无穷小 = 无穷小;
- **防坑一**: 无界变量不等于无穷大 ($x \sin x$);
- **防坑二**: 无限项相加可能脱离无穷小。

下节预告: 1-4 极限存在准则 (夹逼准则与单调有界定理)

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。