

1-4 极限存在准则

第一章 函数与极限



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 夹逼准则(三明治定理)
- 2 单调有界收敛准则
- 3 两大准则对比与选型决策
- 4 课堂巩固与思维辨析
- 5 本讲小结与考点思维导图

夹逼准则（三明治定理）

PART 1

夹逼准则(数列与函数)

数列情形:若当 n 充分大时:

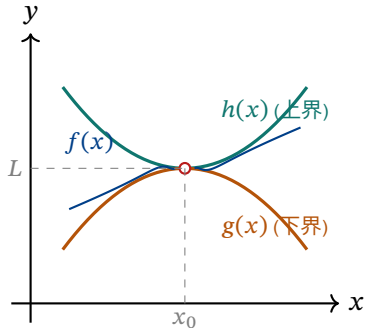
$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ 且 } \lim a_n = \lim c_n = L,$$

则中间数列极限必存在, 且 $\lim b_n = L$ 。

函数情形:若在去心邻域内:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \lim g(x) = \lim h(x) = L,$$

则中间函数极限必存在, 且 $\lim f(x) = L$ 。



上下两面包合拢, 中间馅料被迫同赴极限 L !

典型例题

求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ 。

分析(双向放缩):

■ 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 正弦函数恒有界:

$$-1 \leq \sin n \leq 1;$$

■ 同除以正整数 n :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

规范极限计算: 两端数列的极限为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

由夹逼准则, 原极限必存在且相等:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

思想对比

本题亦可视为“无穷小 $\frac{1}{n} \times$ 有界量 $\sin n = 0$ ”,
两者在微积分认知上殊途同归!

经典例题: n 项求和式极限

求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$ 。

注意: 常见致命误区

$$\lim \sum = \sum \lim?$$

“各项极限为 0 $\implies$ 和为 0”?

错! 项数 $n \rightarrow \infty$ 为无限项, 法则失效! 必须整体放缩求和。

分母放缩突破口

通项分母为 $n^2 + k$ ($k = 1, \dots, n$):

- **最大分母** (对应最小项): $n^2 + n$;
- **最小分母** (对应最大项): $n^2 + 1$ 。

将分母换为常数提至求和号外!

第一步: 构造双向求和夹逼: 对任意 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\frac{k}{n^2 + n} \leq \frac{k}{n^2 + k} \leq \frac{k}{n^2 + 1}.$$

求和并代入 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}.$$

第二步: 两端取极限:

■ 左端(下界): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2};$

■ 右端(上界): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2} = \frac{1}{2}.$

由夹逼准则, 原式极限为 $\frac{1}{2}$. ■

单调有界收敛准则

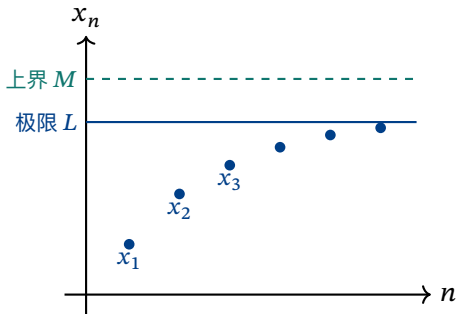
PART 2

单调有界收敛准则(实数完备性)

单调有界数列必有极限:

- 单调递增且有上界 $\implies$ 极限必存在;
- 单调递减且有下界 $\implies$ 极限必存在。

哲学内涵: 单调性杜绝了“振荡发散”, 有界性杜绝了“奔向无穷”。两者兼具, 必在实数轴上撞上极限天花板!



一步步向前挪动, 前有高墙阻挡,
最终必然密集成点聚集于极限 $L \leq M$!

经典递推数列

已知数列 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 并求其值。

步骤一: 归纳法证有上界

猜想上界为 2:

1. $n = 1$ 时, $a_1 = \sqrt{2} < 2$ 成立;
2. 设 $a_k < 2$, 则:

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

由归纳法知恒有 $a_n < 2$, 即有上界。

步骤二: 作差法证单调性

考查相邻两项之差:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(2 - a_n)(1 + a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n}.$$

由 $0 < a_n < 2$ 知分子分母均正, 故 $a_{n+1} > a_n$, 数列单调递增。

步骤三: 代数方程求解与舍根

由单调有界准则知 $\lim a_n = L$ 存在。对递推式两边取极限:

$$L = \sqrt{2 + L} \implies L^2 - L - 2 = 0.$$

解得 $L = 2$ 或 $L = -1$ 。舍根检验: 因 $a_n > 0 \implies L \geq 0$ 。舍去负根 $L = -1$! 最终极限值: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 。 ■

递推求解标准四步范式

1. **有界性**: 归纳法或不等式找界;
2. **单调性**: 作差或作商因式分解;
3. **求极限**: 代数方程求解;
4. **验舍根**: 依据保号性淘汰伪解。

两大准则对比与选型决策

PART 3

夹逼准则(三明治攻坚)

- **适用对象**: 数列、连续函数均可;
- **核心特征**: 通项显式表达, 上下界易构造;
- **典型题型**: 三角振荡有界、无限项求和式、开 n 次方抓大头。

单调有界准则(递推迭代利器)

- **适用对象**: 主要用于数列;
- **核心特征**: 无通项公式, 前后项递推隐式给出;
- **典型题型**: $x_{n+1} = f(x_n)$ 递推序列、积分递推。

决策口诀: 通项可控看夹逼, 前后递推看单调!

课堂巩固与思维辨析

PART 4

综合实战题

设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$, 证明极限存在并求其值。

单调有界证明：

■ $x_1 = 1 > 0$, 由递推知 $x_n > 0$; 且
 $x_{n+1} < 1 + 1 = 2$, 故 $0 < x_n < 2$ **有界**;

■ 作差: $x_{n+1} - x_n = \frac{1 + x_n - x_n^2}{1 + x_n}$ 。

由归纳可证 $x_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 差值恒正, 故**单调递增**!

方程求值与黄金分割：设 $\lim x_n = L$, 代入递推式：

$$L = 1 + \frac{L}{1+L} \implies L^2 - L - 1 = 0.$$

解得正根(负根舍去)：

$$L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad (\text{黄金分割比}).$$

概念辨析:下列命题是否成立?

分析数列性质之间的充分性与必要性:

1. 有界数列必收敛?

× 错! 反例: $x_n = (-1)^n$ 摆动发散。

2. 单调数列必收敛?

× 错! 反例: $x_n = n$ 奔向无穷大发散。

3. 收敛数列必有界?

✓ 对! 这是收敛数列的基本性质。

4. 收敛数列必单调?

× 错! 反例: $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$, 非单调。

终极结论:“单调有界”是收敛的充分非必要条件;“有界”是收敛的必要非充分条件!

综合实战题: 考研经典 n 项和极限

求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ 。

第一步: 不等式双向放缩

将所有项分母替换为最大项与最小项:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

项数均为 n 项, 统一分母使和式显式化。

第二步: 两端极限与夹逼结论

考查两端极限 (分子分母除以 n):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

两端极限同为 1, 由夹逼准则得:

原极限值 = 1。

本讲小结与考点思维导图

PART 5

夹逼准则体系

- **核心结构**: $a_n \leq b_n \leq c_n$ 且两端趋同;
- **放缩心法**: 抓主要矛盾 (大分母缩小, 小分母放大);
- **几何直觉**: 三线包夹被迫汇聚;
- **后继联系**: 第 1 重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的证明基石!

单调有界准则体系

- **核心结构**: 递增有上界 / 递减有下界;
- **四步闭环**: 有界 $\rightarrow$ 单调 $\rightarrow$ 方程求解 $\rightarrow$ 验根;
- **哲学直觉**: 前方阻截, 单向逼近必凝聚;
- **后继联系**: 第 2 重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 的严格定义基石!

下节预告: 1-5 两个重要极限 (微积分的两座丰碑)

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。