

1-5 两个重要极限

第一章 函数与极限



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 第一个重要极限
- 2 第二个重要极限
- 3 两个重要极限对比与综合应用
- 4 常见误区与辨析
- 5 课堂巩固练习
- 6 本节小结与后续预告

第一个重要极限

PART 1

1.1 第一个重要极限: 几何直观与三线不等式



核心结论: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

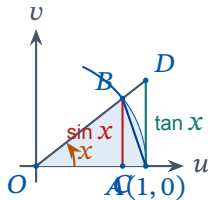
$\left[\frac{0}{0}\right]$ 型未定式, 建立了三角函数与线性多项式在原点的同速收敛。

单位圆几何面积关系 ($R = 1$, $\angle AOB = x$):

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} \sin x < S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} x < \\ S_{\triangle OAD} &= \frac{1}{2} \tan x \end{aligned}$$

立得三线不等式:

$$\sin x < x < \tan x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$



直观本质: 微小角下, 弦长、弧长、切线长彼此无限贴合——“以直代曲”。

步骤 1: 右极限推导 ($x \rightarrow 0^+$)

- 三线不等式同除 $\sin x: 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$
- 取倒数反转不等号: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$
- 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$ 及夹逼准则:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

步骤 2: 左极限推导 ($x \rightarrow 0^-$)

- 偶函数对称性: $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$
- 令 $t = -x \rightarrow 0^+$:
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

严密推论

左右极限均存在且相等:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \end{aligned}$$

核心结构特征: 同步同速原则

若 $\lim \square = 0$, 且 $\square \neq 0$, 则:

$$\lim \frac{\sin \square}{\square} = 1 \quad \text{或} \quad \lim \frac{\square}{\sin \square} = 1$$

要点: 正弦内部的小量必须与分母小量**完全相同**且同时趋于 0。

三角与反三角变式族

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad (\text{令 } x = \sin t)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad (\text{令 } x = \tan t)$$

线性系数缩放公式

当 $x \rightarrow 0$ 时, 对于常数 $a, b \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

题: 典型例题 1-5-1

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ 。

解析: 配凑同一小量

解: 分子正弦内角为 $3x$ (趋于 0), 分母需配凑相同小量 $3x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right) \\ &= 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \\ &= 3 \times 1 = 3\end{aligned}$$

方法点拨与推广

核心技巧:

- “缺什么补什么, 补什么乘什么”
- 恒等变形保持分式值不变

高频推广公式:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \quad (k \neq 0)$$

题: 典型例题 1-5-2

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 。

解析: 倍角公式降次

解: 利用三角恒等式 $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right] \\&= \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

极重要考研推论

核心等价关系: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

考研与竞赛中最常用的等价代换之一, 能迅速将三角差转化为平方二次项!

第二个重要极限

PART 2

连续复利问题

本金 1 元, 年利率 100%, 一年内等分 n 次
结息复利, 期末本利和:

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- 年结 ($n = 1$): $S_1 = (1 + 1)^1 = 2$
- 月结 ($n = 12$): $S_{12} \approx 2.6130$
- 日结 ($n = 365$): $S_{365} \approx 2.7145$
- 连续结息 ($n \rightarrow \infty$): 收敛于常数

自然底数 e 的定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828 \dots$$

由**单调有界准则**保证极限存在:

- 数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 严格单调递增
- 且有明确上界: $a_n < 3$

本质形态: 典型的 1^∞ 型未定式——底数趋于 1 产生缩减, 指数趋于 ∞ 产生扩张, 达到动态平衡。

2.2 第二个重要极限:两种标准表达形式



形式一:无穷大量型($x \rightarrow \infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- 底数: $1 +$ 无穷小量
- 指数: 该无穷小量的倒数
- $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 均成立

形式二:无穷小量型($t \rightarrow 0$)

令 $t = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时 $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

- 底数: $1 + t$
- 指数: $\frac{1}{t}$
- 零点附近的对偶标准型

通用统一式: 若 $\lim \alpha(x) = 0$ ($\alpha \neq 0$), 则 $\lim \left[1 + \alpha(x)\right]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$ 。

1^∞ 型标准三步解题策略

面对 $\lim [u(x)]^{v(x)}$, 若 $\lim u(x) = 1, \lim v(x) = \infty$:

1. **一写基底**: 改写为 $1 + \alpha(x)$ 的形态, 其中 $\alpha(x) = u(x) - 1 \rightarrow 0$;
2. **二配倒数**: 强制在指数上凑出底数小量的倒数 $\frac{1}{\alpha(x)}$;
3. **三补偿幂**: 将原指数还原并计算补偿指数的极限 $\lim [\alpha(x) \cdot v(x)]$ 。

公式化速算通道

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim \left[\left(1 + [u(x) - 1] \right)^{\frac{1}{u(x)-1}} \right]^{[u(x)-1] \cdot v(x)} = e^{\lim [u(x)-1] \cdot v(x)}$$

只要两小量之积的极限 $\lim (u - 1)v = A$ 存在, 结果即为 e^A 。

■ 题: 典型例题 1-5-3

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ 。

解析: 凑倒数指数

解: 底数小量为 $\frac{2}{x}$, 其倒数为 $\frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 \\ &= e^2\end{aligned}$$

通用推广公式

当 $x \rightarrow \infty$ 时:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

本题 $a = 2, b = 1$, 直接代入即得
 $e^{2 \times 1} = e^2$ 。

题: 典型例题 1-5-4

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$ 。

解法一: 指数配凑法

底数小量为 $3x$, 指数配凑 $\frac{1}{3x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^3 \\ &= \left[\lim_{3x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}} \right]^3 \\ &= e^3\end{aligned}$$

解法二: 换元至无穷大

令 $t = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^t \\ &= e^3\end{aligned}$$

两种形式完全等价, 熟练后推荐直接配凑。

两个重要极限对比与综合应用

PART 3

维度	第一个重要极限	第二个重要极限
标准表达式	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
未定式类型	$\left[\frac{0}{0}\right]$ 型	$[1^\infty]$ 型
函数类型	三角函数 / 几何构型	指数幂 / 增长模型
理论证明依据	三线不等式 + 夹逼准则	二项式展开 + 单调有界准则
核心解题思想	构造“同款小量”，同速替换	凑“1 + 小量”及其倒数幂次
高频衍生公式	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

解题直觉判据

- 遇式中包含 $\sin, \tan, \arcsin, \arctan$ 且小量趋于 0 $\Rightarrow$ 优先联想**第一个重要极限**；
- 遇式中形如“底数趋于 1, 指数趋于 ∞ ”的幂指函数 $\Rightarrow$ 坚决锁定**第二个重要极限**。

题:综合例题

■ 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \right]$ 。

第一步:四则运算乘法解耦

两因式极限独立存在,按四则法则乘法拆分:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

第二步:逐个击破与组合

■ 因式一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

■ 因式二: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

最终结果: $I = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ 。

常见误区与辨析

PART 4

误区 1: 机械套用 $\sin \square/\square$

- [误] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1$
非 $\left[\frac{0}{0}\right]$, 直接代入得 $\sin 1$ 。
- [误] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1$
分子分母小量非同阶, 应为 2。
- [误] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$
 $x \rightarrow \infty$ 为“有界 $\times$ 无穷小”, 结果为 0。

误区 2: 盲目当成 1^∞ 型

- [误] $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$
此为 1^0 型, 结果为 $1^0 = 1$ 。
- [误] $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = e$
补偿幂次为 $e^{\lim x} = +\infty$ 。
- [误] $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = e$
无幂指放大, 普通分式极限为 1。

警钟长鸣: 必须严格匹配收敛趋势——第一个必验“0 处同步”, 第二个必验“底 1 顶 ∞ ”。

课堂巩固练习

PART 5

题：课堂练习 1

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$ 。

方法一：标准因式分解

解：配凑线性小量：

$$\begin{aligned}\frac{\tan 2x}{\sin 5x} &= \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} \\ &\rightarrow 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

方法二：等价无穷小快速通路

当 $x \rightarrow 0$ 时：

$$\tan 2x \sim 2x, \quad \sin 5x \sim 5x$$

乘除因子直接代换：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

注：等价无穷小代换的理论将在 1-6 节系统展开。

题:课堂练习 2

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$ 。

解析:分离常数与配凑法

解:

1. 分离常数: $\frac{2x+3}{2x+1} = 1 + \frac{2}{2x+1} \quad (\rightarrow 1)$

2. 凑倒数幂次: 原式 $= \left[\left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{2}} \right]^{\frac{2(x+1)}{2x+1}}$

3. 补偿指数求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)}{2x+1} = 1 \implies \text{原式} = e^1 = e。$

题:课堂练习 3

求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + 3 \ln x)^{\frac{2}{\ln x}}$ 。

换元法:化复杂为标准型

解:

- 观察到当 $x \rightarrow 1$ 时, $\ln x \rightarrow 0$
- 令 $t = \ln x$, 则 $t \rightarrow 0$
- 原极限化为关于 t 的标准零点型:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{\frac{2}{t}}$$

- 此为标准的 1^∞ 未定式。

指数配凑与求值

底数小量为 $3t$, 在指数配凑 $\frac{1}{3t}$:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{\frac{2}{t}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1 + 3t)^{\frac{1}{3t}} \right]^{3t \cdot \frac{2}{t}} \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{\frac{1}{3t}} \right]^6 \\ &= e^6\end{aligned}$$

本节小结与后续预告

PART 6

两个重要极限的灵魂公式

$$1. \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

- 几何三线不等式夹逼
- 导数推论: $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$$2. \lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$$

- 复利极限, 单调有界保证
- 通用速算: $\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}$

核心能力清单

- **型别辨识**: 先定性 ($\frac{0}{0}$ 还是 1^∞), 切忌盲套公式;
- **配项拆分**: 熟练补齐系数与倒数指数;
- **解耦运算**: 非零极限因子先行拆离。

下节核心预告

1-6 无穷小的比较:

- 高阶、低阶、同阶与等价无穷小
- 等价无穷小代换“八大金刚”与“加减禁区”

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。