

1-6 无穷小的比较

第一章 函数与极限



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 无穷小比较的概念与几何直观
- 2 无穷小阶数的定义与记号体系
- 3 常用等价无穷小与八大金刚
- 4 等价无穷小代换定理与代换禁区
- 5 课堂巩固练习
- 6 本节小结与后续预告

无穷小比较的概念与几何直观

PART 1

1.1 为什么需要比较无穷小?



核心认知: 极限皆为零, 快慢大不同

若 $\lim \alpha = 0$ 且 $\lim \beta = 0$, 虽然两量最终均趋于 0, 但它们逼近零点的相对速率存在本质差异。

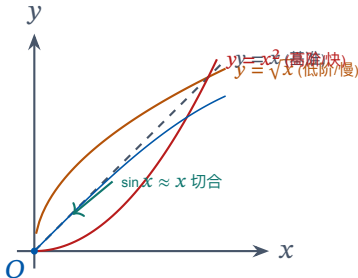
典型直观场景(当 $x \rightarrow 0$ 时):

■ $x = 0.01$ 时:

- $\sqrt{x} = 0.1$ (衰减缓慢)
- $x = 0.01$ (基准参考)
- $x^2 = 0.0001$ (极其微小, 极速归零)

■ 在近似计算中, 次小量常可安全忽略;

■ 刻画微分、导数与泰勒展开的数学基石。



几何本质: 曲线贴合 x 轴越紧密, 趋零阶数越高。

无穷小阶数的定义与记号体系

PART 2

设在同一极限过程 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 中, α, β 均为无穷小, 且 $\alpha \neq 0$:

1. 高阶无穷小: $\beta = o(\alpha)$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

说明 β 趋于 0 的速率**远快于** α 。

2. 低阶无穷小

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$$

说明 β 趋于 0 的速率**慢于** α 。

3. 同阶与等价无穷小: $\beta \sim \alpha$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$$

若常数 $c = 1$, 则称 α 与 β 是**等价无穷小**, 记为 $\alpha \sim \beta$ 。

4. k 阶无穷小量

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ ($k > 0$), 则称 β 是关于 α 的 k **阶无穷小**。

题: 典型例题 1-6-1

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 考察下列各无穷小量关于基准小量 x 的阶数关系:
(1) x^2 与 x ; (2) $\sin x$ 与 x ; (3) $1 - \cos x$ 与 x 。

分析与极限计算

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0 \implies x^2 = o(x)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \sin x \sim x$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$

结论与定阶总结

- x^2 是 x 的高阶无穷小;
- $\sin x$ 与 x 为等价无穷小;
- $1 - \cos x$ 为关于 x 的 2 阶无穷小。

定阶要领: 计算比值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = c \neq 0$ 确定阶数 k 。

题:典型例题 1-6-2

确定当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 关于 x 的无穷小阶数。

解析:因式分解与化零为整

解:公因式重构为乘积结构:

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x)$$

与基准量 x^k 作比值:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x^{3-k} \right] \end{aligned}$$

极限计算与定阶

取 $k = 3$, 则:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

结论: $\tan x - \sin x$ 是关于 x 的 3 阶无穷小。高频考研等价式:

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3 \quad (x \rightarrow 0)$$

题: 典型例题 1-6-3

- 将下列无穷小按 $x \rightarrow 0^+$ 时趋于 0 的速率由快到慢 (即阶数从高到低) 进行排序:
 $\sqrt{x}, x^2, \ln(1+x), e^x - 1, x \sin x$

步骤 1: 统一转化为标尺 x^k

基本等价转化各量:

- $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ($\frac{1}{2}$ 阶, 最慢)
- $\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x$ (1 阶)
- $x^2, x \sin x \sim x^2$ (2 阶, 最快)

步骤 2: 阶数对比与排序结论

定则: 幂次 k 越大, 阶数越高, 趋零越快。

- 2 阶: $x^2 \sim x \sin x$
- 1 阶: $\ln(1+x) \sim e^x - 1$
- $\frac{1}{2}$ 阶: $\sqrt{x}$

排序: $\{x^2, x \sin x\} > \{\ln(1+x), e^x - 1\} > \sqrt{x}$ 。

常用等价无穷小与八大金刚

PART 3

3.1 常用等价无穷小速查库 ($x \rightarrow 0$ 时)

三角函数族	等价形式	指数与对数族	等价形式
$\sin x$	$\sim x$	$e^x - 1$	$\sim x$
$\tan x$	$\sim x$	$a^x - 1$	$\sim x \ln a$
$\arcsin x$	$\sim x$	$\ln(1 + x)$	$\sim x$
$\arctan x$	$\sim x$	$\log_a(1 + x)$	$\sim \frac{x}{\ln a}$
$1 - \cos x$	$\sim \frac{1}{2}x^2$	$(1 + x)^\alpha - 1$	$\sim \alpha x$

核心泛化法则: 框架法则

若 $\lim \square = 0$, 则上述所有公式中 x 均可完全替换为复合小量 $\square$ 。

例如: $\sin(3x^2) \sim 3x^2$, $\ln(1 + \tan x) \sim \tan x \sim x$ 。

等价无穷小代换定理与代换禁区

PART 4

定理(乘除因子代换原理)

设 $\alpha \sim \alpha^*$, $\beta \sim \beta^*$, 且极限 $\lim \frac{\beta^*}{\alpha^*}$ 存在, 则:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta^*} \cdot \frac{\beta^*}{\alpha^*} \cdot \frac{\alpha^*}{\alpha} \right) = 1 \cdot \lim \frac{\beta^*}{\alpha^*} \cdot 1 = \lim \frac{\beta^*}{\alpha^*}$$

黄金准则: 乘除因子任意代

在整个分子或分母中, 作为**乘积或商的独立因式**, 可以单独替换为它的等价无穷小。

高压红线: 加减运算慎重代

加减代数和项中**原则上严禁**部分替换, 极易造成最高阶主部相互抵消而导致答案彻底错误!

题: 典型例题 1-6-4

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \ln(1 + 2x)}{x \cdot \tan x}$ 。

解析: 乘积因子全面换装

解: $x \rightarrow 0$ 时各乘积因子满足:

$\sin 3x \sim 3x$, $\ln(1 + 2x) \sim 2x$, $\tan x \sim x$ 。代入各因子:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x) \cdot (2x)}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{x^2} = 6$$

效率对比与技巧归纳

若不采用等价无穷小: 需反复拼凑 3 组重要极限。**等价代换优势:**“一秒降维”, 瞬间将复杂的超越函数式化为简单的多项式乘积运算!

题:典型例题 1-6-5 (高频避坑题)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 。

盲目代换错解(首项相消陷阱)

[错解] 分子直接代换:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0 \quad \text{[错!]}$$

错因剖析:

直接代换抹杀了同阶主导项相消后的次级高阶小量, 将真实贡献彻底清零!

第一章正解(因式分解转乘积)

提取公因式转为乘积形态:

$$\begin{aligned}\tan x - \sin x &= \tan x(1 - \cos x) \\ &\sim x \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3\end{aligned}$$

$$\text{原极限为: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}。$$

(无法分解时后继由泰勒公式解决)

课堂巩固练习

PART 5

题:课堂练习 1

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \cdot \arctan x}{x \cdot (1 - \cos x)}$ 。

第一步:等价无穷小因子代换

当 $x \rightarrow 0$ 时,分子分母各乘积因式等价为:

$$e^x - 1 \sim x, \quad \arctan x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

原极限简化为:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x}$$

第二步:左右极限辨析

进一步考察左右极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$$

左右极限不相等且为无穷大。**结论:**该极限 **不存在** (亦非无穷大)。

题：课堂练习 2

已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[5]{1 + \sin ax^2} - 1 \sim (\cos x - 1)$, 求常数 a 的值。

步骤 1: 化简两端等价式

左端: 利用 $(1 + \square)^\alpha - 1 \sim \alpha \square$:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{1 + \sin ax^2} - 1 &= (1 + \sin ax^2)^{\frac{1}{5}} - 1 \\ &\sim \frac{1}{5} \sin ax^2 \sim \frac{a}{5} x^2\end{aligned}$$

右端:

$$\cos x - 1 = -(1 - \cos x) \sim -\frac{1}{2} x^2$$

步骤 2: 建立方程求解

由两无穷小等价的定义, 比值极限必须为 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{5} x^2}{-\frac{1}{2} x^2} = 1$$

化简系数方程:

$$\frac{a/5}{-1/2} = -\frac{2a}{5} = 1 \implies a = -\frac{5}{2}$$

题:课堂练习 3

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x + \cos x}}{\sqrt[3]{1 + \sin x^2} - 1}$ 。

分母化简与分子有理化

分母直接代换: $\sqrt[3]{1 + \sin x^2} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$ 。分

子共轭有理化:

$$\begin{aligned}\text{分子} &= \frac{(1+x) - (x + \cos x)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x + \cos x}} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x + \cos x}}\end{aligned}$$

代入求值与收官

共轭式趋于 2, 故分子 $\sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{2} = \frac{1}{4}x^2$ 。

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3}{4}$$

本节小结与后续预告

PART 6

核心概念与分类体系

- 比值极限判定: 高阶(0)、同阶($c \neq 0$)、等价(1);
- 阶数越高, 趋零速度越快, 图像贴合 x 轴越紧。

实战代换法则

- **乘除因子**: 放心代换, 八大金刚直接秒杀;
- **加减项**: 若首项相消, 严禁代换, 需提取公因式或展开。

下节核心预告

1-7 函数的连续性与间断点:

- 连续的 ε - δ 与增量定义
- 第一类间断点(可去、跳跃)与第二类间断点(无穷、振荡)
- 闭区间连续函数三大经典定理(有界、最值、介值零点)

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。