

1-7 函数的连续性

第一章 函数与极限



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

- 1 连续性的概念与三种刻画
- 2 间断点及其几何分类
- 3 连续函数的性质与初等函数连续性
- 4 闭区间上连续函数的性质
- 5 课堂巩固练习
- 6 一致连续性与第一章总结

连续性的概念与三种刻画

PART 1

直观认知：一笔画出，无缝演化

生活映射：

- 气温的变化：平滑升降，绝无跳空瞬移
- 汽车的里程：随时间平滑累积

几何特征：曲线连绵不断，中间没有任何“断口”、“空洞”或“撕裂”。

严密数学定义：极限定义法

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义。
若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**。**核心判定三条件(缺一不可)：**

1. 点 x_0 处**有定义**： $f(x_0)$ 存在；
2. 趋于 x_0 时**极限存在**： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ；
3. 极限值与函数值**精确相等**：
 $A = f(x_0)$ 。

刻画一: 增量定义法(微积分本源)

设自变量增量 $\Delta x = x - x_0$,
相应函数值增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。函数在 x_0 连续 $\iff$ 输小得小:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

理论价值: 导数与微分理论的直接基石!

刻画二: ε - δ 语言(分析学精度)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

本质辨析(连续 vs 极限):

- **极限要求:** $0 < |x - x_0| < \delta$ (去心, 与 x_0 点本身状态无关);
- **连续要求:** $|x - x_0| < \delta$ (不去心, 中心点必须严丝合缝匹配)。

题: 典型例题 1-7-1

验证函数 $f(x) = 2x + 1$ 在点 $x_0 = 1$ 处的连续性, 并给出单侧连续性的规范描述。

连续性三步验证法

解: 按连续性三要素逐一严格核对:

1. **有定义:** $f(1) = 2(1) + 1 = 3$ (函数值存在);
2. **求极限:** $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 2(1) + 1 = 3$ (极限存在);
3. **验相等:** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3$ 。

故 $f(x) = 2x + 1$ 在 $x = 1$ 处连续。

单侧连续性定理

左连续: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$;

右连续: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 。充要判据:

$$f(x) \text{ 连续} \iff f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

定理: 一切多项式函数在全体实数集 $\mathbb{R}$ 上处处连续。

间断点及其几何分类

PART 2

间断点的三种成因(连续条件破损)

只要以下三者其一成立, 点 x_0 即为间断点:

1. $f(x)$ 在 x_0 处无定义;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x_0)$ 与极限均存在, 但两者不等:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

核心分类标准: 左右极限是否存在

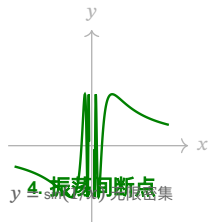
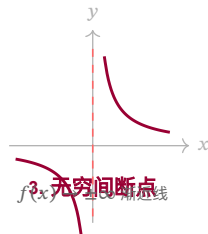
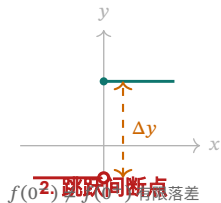
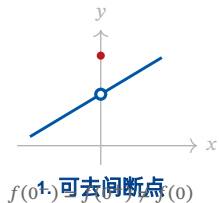
第一类间断点(良性: 左右极限均存在):

- 可去间断点: $f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$ (或无定义);
- 跳跃间断点: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$ (发生有限落差)。

第二类间断点(恶性: 左右极限至少一个不存在):

- 无穷间断点: 至少一侧极限为 ∞ ;
- 振荡间断点: 在点附近发生无穷密集振荡。

2.2 四大间断点几何直观全景图谱



核心逻辑： 判定间断点类型 $\iff$ 考察左右极限是否存在及相等。

题:典型例题 1-7-2

讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ 在分界点 $x_0 = 1$ 处的连续性与间断类型。

单侧极限核算

解: $f(1) = 1^2 = 1$ 。

■ 左极限: $f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$

■ 右极限: $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$

左右极限均存在但 $f(1^-) \neq f(1^+)$ 。

性质判定与跳跃度

左右极限存在但不相等:

$$f(1^-) = 1 \neq f(1^+) = 2$$

结论: 点 $x = 1$ 是第一类跳跃间断点。跳

跃度: $\Delta y = |2 - 1| = 1$

题:典型例题 1-7-3

判断下列函数在指定无定义点处的间断点类型:

$$(1) f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x=0) \quad (2) g(x) = \frac{|x|}{x} \quad (x=0) \quad (3) h(x) = \frac{1}{x-1} \quad (x=1)$$

(1) 可去间断点

极限分析: $x=0$ 无定义, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。左右极限存在且相等。**定性:**可去间断点。

补充定义 $f(0) = 1$ 即可使其连续。

(2) 跳跃间断点

极限分析: $x=0$ 无定义。

$$\blacksquare g(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\blacksquare g(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

左右极限存在但不相等。**定性:**第一类跳跃间断点。

(3) 无穷间断点

极限分析: $x=1$ 分母为零。

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{x-1} = \pm\infty$$

左右极限为无穷大。**定性:**第二类无穷间断点。
 $x=1$ 为铅直渐近线。

连续函数的性质与 初等函数连续性

PART 3

定理一：代数四则运算封闭性

若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处均连续, 则:

- 和差: $f(x) \pm g(x)$ 在 x_0 连续
- 乘积: $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 连续
- 商式: $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 连续 (需 $g(x_0) \neq 0$)

直观概括:“连续性的代数合成仍保持连续”。

定理二：复合函数的连续性

若 $u = g(x)$ 在 x_0 连续, 且外层函数 $y = f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 连续, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 连续。**运算杀手锏 (极限号与函数号自由交换):**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(g(x_0))$$

无需繁琐证明, 只需将极限逐层“穿透”入内!

核心理程碑定理

1. 六类基本初等函数(常数、幂、指、对、三角、反三角)在其定义域内处处连续;
2. 一切初等函数在其定义区间内处处连续。

求极限第一黄金法则:代入法

若 $f(x)$ 是初等函数, 且 x_0 属于其定义区间, 则:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (\text{直接代入函数值!})$$

极速代入实战演示

例 1: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\pi}{3})$

$$= \cos\left(0 + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

例 2: 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^2 - 1)$

$$= \ln(2^2 - 1) = \ln 3$$

例 3: 求 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x+1}{x^2+1}}$

$$= e^{\frac{1+1}{1^2+1}} = e^1 = e$$

闭区间上连续函数的性质

PART 4

有界性与最值定理(Weierstrass)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则:

- **有界性:** $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$;
- **最值性:** $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必达最值:
 $f(\xi_1) = M, f(\xi_2) = m$ ($\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$)

条件严格性反思:缺一不可

反例 1(开区间破坏有界性):

$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 但无界! 反

例 2(开区间破坏最值存在):

$f(x) = x$ 在 $(0, 1)$ 上连续有界,
但既无最大值也无最小值! **反例 3(非连续性破坏有界):**

闭区间上若存在间断点, 最值定理同样失效。

介值定理 (Intermediate Value)

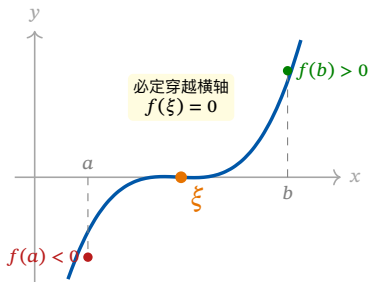
若 $f(x) \in C[a, b]$ 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意数 C , 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = C$$

零点定理 (特例: 取 $C = 0$)

若 $f(x) \in C[a, b]$ 且端点异号 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = 0 \quad (\xi \text{ 即为方程的实根})$$



题: 典型例题 1-7-4

证明方程 $x^3 - 4x + 1 = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根。

零点定理证明“标准三步法”

证明:

1. 设辅助函数: 设 $f(x) = x^3 - 4x + 1$ 。
2. 确认区间连续性: $f(x)$ 为多项式, 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 即 $f \in C[0, 1]$ 。
3. 计算端点值验异号:
 $f(0) = 1 > 0, f(1) = -2 < 0$;
端点值相乘 $f(0) \cdot f(1) = -2 < 0$ 。

定理引用与结论陈述

由零点定理, 开区间 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = \xi^3 - 4\xi + 1 = 0$ 。
故方程在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根。□

方法升华:

将方程根的存在性, 转化为闭区间连续函数跨越坐标轴的连通性!

课堂巩固练习

PART 5

题:课堂练习 1

■ 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1 + e^{\frac{1}{x}}) \arctan \frac{\pi}{x}, & x < 0 \\ k \cos \pi x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求常数 k 的值。

左右极限单侧核算

解: 连续性充要条件 $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$ 。

■ 右极限: $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} k \cos \pi x = k$

■ 左极限: 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$,
 $e^{1/x} \rightarrow 0, \arctan \frac{\pi}{x} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
 $\implies f(0^-) = (1 + 0)(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$

方程联立与避坑

左右极限吻合: $k = -\frac{\pi}{2}$ 。避坑要领:

■ 区分 0^+ 与 0^- 的正负指数方向;

■ $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ 。

题:课堂练习 2

求函数 $f(x) = \frac{x^2 + x}{|x|(x^2 - 1)}$ 的全体间断点并指明其类型。

因式分解与点 x

候选点: $x = 0, 1, -1$ 。化简 $f(x) = \frac{x(x+1)}{|x|(x-1)(x+1)}$ 。

- 考查 $x = 0: f(0^+) \rightarrow -1, f(0^-) \rightarrow 1$ 。
左右极限不等 $\Rightarrow$ 跳跃间断点!

剩余奇点的极限分析

- 考查 $x = 1$:
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{|x|(x-1)} = \infty \Rightarrow$ 第二类无穷间断点!
- 考查 $x = -1$:
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ 第一类可去间断点!

题:课堂练习 3

证明方程 $x = \sin x + 2$ 至少存在一个不超过 3 的正根。

构造函数与闭区间选取

证明:

1. 移项构造连续函数
 $F(x) = x - \sin x - 2$ 。
2. 目标证明存在 $\xi \in (0, 3]$ 使得
 $F(\xi) = 0$ 。
3. $F(x)$ 为初等函数, 在闭区间 $[0, 3]$ 上连续, 即 $F \in C[0, 3]$ 。

端点放缩检验与收官

核算端点符号:

$$\blacksquare F(0) = -2 < 0$$

$$\blacksquare F(3) = 1 - \sin 3 > 0 \text{ (因 } \sin 3 < 1 \text{)}$$

两端点严格异号 $F(0) \cdot F(3) < 0$ 。由零点定理, 存在 $\xi \in (0, 3)$ 满足 $F(\xi) = 0$ 。
方程至少存在一个不超过 3 的正根。 $\square$

一致连续性与第一章总结

PART 6

概念对比: 局部约束 vs 全局均匀

普通连续(逐点特性):

$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \dots$

δ 的选取依赖于具体点 x_0 , 斜率越陡处 δ 必须被迫缩得极小! **一致连续(全局均匀**

特性):

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 对区间内任意两点 x_1, x_2 , 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

一个统一的 δ “通行管全区”!

康托(Cantor)大定理

定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上必一致连续! **经典**

反例(开区间失效):

$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 但非一致连续。

在原点右侧, 曲线趋于垂直陡峭, 任意小的距离都可引发无穷大落差! **后继纽带:**

康托定理是定积分理论中“连续函数必可积”的底层支撑柱!

第一章知识体系三阶支架

- **基石篇(1-0 ~ 1-3)**: 邻域语言 $\rightarrow$ 数列极限 ε - $N \rightarrow$ 函数极限 ε - $\delta \rightarrow$ 无穷小量分析;
- **工具篇(1-4 ~ 1-6)**: 夹逼准则与单调有界 $\rightarrow$ 两个重要极限 $\rightarrow$ 等价无穷小八大金刚;
- **结构篇(1-7)**: 极限的闭环 $\rightarrow$ 函数的连续性与间断点 $\rightarrow$ 闭区间连续三大刚性定理。

下一章:第二章导数与微分

从“割线趋近切线”与“瞬时速度”出发:

- 导数的极限本质定义
- 导数的几何意义与物理内涵
- 求导运算法则与高阶导数
- 微分的形式不变性与局部线性化

祝贺大家圆满学完第一章全部核心内容!

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。