

2-1 导数的概念与函数的微分

第二章 一元函数微分学

- 1 导数的概念与几何意义
- 2 函数的微分与形式不变性
- 3 微分在近似计算与误差估计中的应用
- 4 总结与反思

导数的概念与几何意义

PART 1

一、物理直观:非匀速直线运动的瞬时速度

设位移函数为 $s = s(t)$ 。质点在 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 的平均速度为:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度的极限即为 t_0 时刻的瞬时速度:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

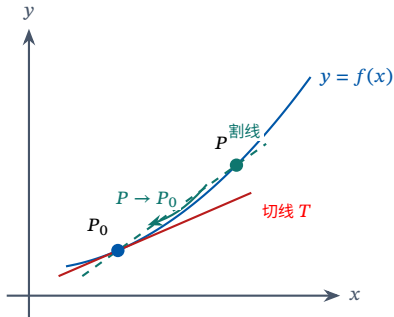
二、几何直观:曲线切线的斜率

割线 P_0P (其中 $P_0(x_0, y_0)$, $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$) 的斜率为:

$$k_{\text{割}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

割线极限位置即为切线, 切线斜率 k 即为差商极限:

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$$



一、增量形式(微积分本源)

设 $y = f(x)$ 在 x_0 某邻域内有定义。若差商极限存在：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

记作 $f'(x_0)$ 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ ，刻画因变量随自变量的**瞬时变化率**。

二、动点形式(单点计算形态)

令动点 $x = x_0 + \Delta x$ (即 $\Delta x = x - x_0$)：

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

结构等价，消除增量符号 Δ ；专用于判定**分段点**与**具体数值点**可导性。

局部性本质：导数是点态性质，仅由 x_0 的极微小去心邻域决定，与远处无关。

一、由定义求导三步法范式

任给函数 $y = f(x)$, 按定义求导分为三步:

1. 算增量: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2. 算差商: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

3. 取极限: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

核心启示: 若区间内每点皆可导, 则 $x \mapsto f'(x)$ 构成**导函数**; 初等函数导数公式本质上皆由定义推导(其余公式可证, 见后)!

二、经典推导范例: $(\sin x)' = \cos x$

1. 增量(和差化积: $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$):

$$\Delta y = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

2. 差商(分离第一重要极限结构):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}$$

3. 极限(由余弦函数连续性与第一重要极限兑现):

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

几何本质:切线的斜率

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可导, 则割线逼近极限下的切线斜率为:

$$k_{\text{切}} = \tan \alpha = f'(x_0)$$

切线与法线方程的标准形式

- 切线方程(斜率为 $f'(x_0)$): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$;
- 法线方程(垂直于切线): $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$ 。

垂直切线特殊情形

若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ (导数不存在, 如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在原点), 切线垂直于 x 轴, 切线方程为 $x = x_0$, 法线方程为 $y = y_0$ 。

单侧导数的标准定义

从自变量单侧邻域无限逼近的瞬时变化率：

■ 左导数：
$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

■ 右导数：
$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

单点可导充要判定定理

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A$ (A 为有限实数)。

核心考场应用场景

- 分段函数分段点(两侧解析式不同)；
- 绝对值折点(几何呈现尖角折点)；
- 定义区间端点(端点仅存在单侧导数)。

一、可导必连续(定理与证明)

定理:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,则必在点 x_0 处连续。

极简推导:因 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, 由极限性质:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

增量趋于零,故函数在该点连续!

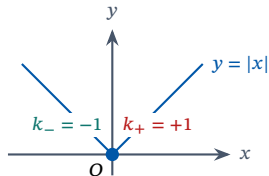
二、逆命题不真:连续不一定可导

经典反例: $f(x) = |x|$ 在原点 $x = 0$ 处:

- 显然在 $x = 0$ 处连续 ($\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$);
- 计算单侧导数:

$$f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = +1$$

- 因 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 故在原点不可导!
- 几何直观: 尖点处两侧切线斜率突变, 无唯一切线。



例 2-1-1:分段点处的可导性判定

题:典型例题 2-1-1

设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导,求待定常数 a, b 的值。

闸门一:连续性是可导的前提

函数在 $x = 1$ 处可导,必首先在 $x = 1$ 处连续:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

- 左极限: $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$;
- 右极限: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$;
- 锁定方程 (1): $a + b = 1$ 。

常见致命避坑警示

- 错误做法:直接对两侧求导得 $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ a, & x > 1 \end{cases}$, 令 $2(1) = a \implies a = 2$ 。
- 病灶所在:两支导函数在端点的极限相等**不等于**原函数在该点可导! 若原函数不连续, 直接求导必定犯错。
- 正道:严格按照导数的**差商定义式**验证。

规范解答

1. 由连续性建立方程:因 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导,故必在 $x = 1$ 处连续。

$$f(1) = 1^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \implies a + b = 1 \quad - (1)$$

2. 由导数定义计算左右导数:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = a \quad (\text{因 } b - 1 = -a)$$

3. 联立求解:令 $f'_-(1) = f'_+(1) \implies a = 2$ 。代入 (1) 式解得 $b = 1 - 2 = -1$ 。

例 2-1-2:导数定义极限式的识别与变形

题:典型例题 2-1-2

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导,且 $f'(x_0) = A$ 。求极限:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 3h)}{h}$$

例 2-1-2: 规范解答与结构配凑法

规范解答

在分子中添加并减去基准点值 $f(x_0)$, 拆分为两项差商:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 3h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[2 \cdot \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h} + 3 \cdot \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{-3h} \right]\end{aligned}$$

因 $f'(x_0) = A$ 存在, 两子极限分别满足导数定义:

$$= 2f'(x_0) + 3f'(x_0) = 5f'(x_0) = 5A \blacksquare$$

结构记忆法则: 若 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h} = (\alpha - \beta)f'(x_0)$$

函数的微分与形式不变性

PART 2

一、无穷小转写定理

根据第一章极限与无穷小关系定理:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha \quad (\alpha \rightarrow 0)$$

两端同乘以自变量增量 Δx :

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$$

因 $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, 即得到真实的函数增量公式:

$$\Delta y = \underbrace{A\Delta x}_{\text{线性主部}} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\text{高阶误差}}$$

二、微分的定义与微商兑现

- 微分定义:增量的线性主部称为函数在点 x_0 处的微分,记作:

$$dy = A\Delta x$$

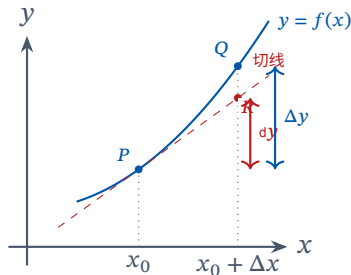
- 可微充要定理:一元函数在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ 可导,且主部系数恒为 $A = f'(x_0)$;
- 自变量微分与微商:取 $y = x$ 得 $dx = \Delta x$,故 $dy = f'(x)dx$;莱布尼茨微商记号 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ 兑现为真正的商(两微分之商)!

一、切线纵坐标增量

设曲线方程为 $y = f(x)$, 点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线为 T :

- Δy : 曲线上点从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时**真实曲线纵坐标增量**;
- dy : 相应切线上点的**切线纵坐标增量**;
- 差值 $\Delta y - dy = o(\Delta x)$: 当 $|\Delta x|$ 极小时, 高阶无穷小误差可忽略不计。

数学核心思想: 在局部微小邻域内, 用线性切线逼近非线性曲线——**以直代曲**。



一、幂函数、指数与对数函数族

函数类型	基本导数公式 ($y' = f'(x)$)	基本微分公式 ($dy = f'(x)dx$)
常数函数	$(C)' = 0$	$dC = 0$
幂函数	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$
指数函数	$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x$	$d(a^x) = a^x \ln a \, dx, \quad d(e^x) = e^x \, dx$
对数函数	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}, \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x}$

认知要领:基本初等函数导数源于定义(可证), 两端同乘 dx 即对偶生成微分。

二、三角函数族与对偶生成机制

函数类型	基本导数公式 ($y' = f'(x)$)	基本微分公式 ($dy = f'(x)dx$)
正弦函数	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x \, dx$
余弦函数	$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x \, dx$

逻辑承接与核心悬念:

上述所有微分公式中, 自变量均为最简单一元变量 x 。若将 x 替换为任意可导的复合中间变量 u (例如 $\sin(x^2 + 1)$), 上述微分结构是否依然保持不变? 请见下节!

一、核心定理表述

无论是自变量 x 还是中间变量 u (设 $u = g(x)$ 可导), 函数 $y = f(u)$ 的微分形式恒保持为:

$$dy = f'(u) du$$

二、微分自治机制与主线定位

若中间变量 $u = g(x)$ 可微, 自变量产生增量 Δx 时, 中间变量增量线性主部即为 $du = g'(x) dx$:

$$dy = f'(u) du = f'(u)(g'(x) dx)$$

- **本质飞跃:** 记号 du 无论代表自变量还是中间变量微分, 计算形式完全自治!
- **重要预告:** 下一讲将由此式两端同除 dx , 直接推出复合求导链式法则 $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$ 。

一、占位符算子机制(源自前表)

由一阶形式不变性, 前表基本公式中的自变量 x 均可脱胎换骨升级为任意表达式 $\square$:

$$d(f(\square)) = f'(\square) d\square$$

只要 $\square$ 处结构一致, 微分规则通性通用:

$$\blacksquare \quad d(\sin \square) = \cos \square d\square, \quad d(e^{\square}) = e^{\square} d\square, \quad d(\ln \square) = \frac{1}{\square} d\square$$

二、算子化代数优势

- 溯源自洽: $\sin, e, \ln$ 导数始于定义, 微分成于乘 dx , 占位符成于形式不变性;
- 免中间符号: 求导过程无需反复设中间变量 u, v , 大幅降低符号认知负担;
- 凑微分基石: 为第四章不定积分“第一类换元积分法(凑微分法)”奠定统一运算律。

微分在近似计算与 误差估计中的应用

PART 3

一、以直代曲的数学公式化

当 $|\Delta x|$ 很微小时, 高阶无穷小误差 $o(\Delta x)$ 可忽略:

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$$

展开函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 移项即得:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

二、基点 x_0 选取的两大黄金法则

1. 邻近原则: 基准点 x_0 距离目标计算点极其接近, 使 $|\Delta x|$ 尽可能微小;
2. 易算原则: 函数值 $f(x_0)$ 与导数值 $f'(x_0)$ 必须能精确且极易心算或手工算出。

例 2-1-3:微分线性近似与误差验证

题:典型计算题 2-1-3

- (1) 利用微分近似计算 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值;
- (2) 以 $y = x^3$ 在 $x_0 = 2$ 、 $\Delta x = 0.01$ 为例, 精确计算增量 Δy 与微分 dy , 验证 $\Delta y = dy + o(\Delta x)$ 。

例 2-1-3: 规范解答与误差量级分析

规范解答

(1) 近似计算 $\sqrt[3]{1.02}$

- 设 $f(x) = x^{1/3}$, 选取基点 $x_0 = 1, \Delta x = 0.02$;
- 导数 $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \implies f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{3}$;
- 近似计算: $\sqrt[3]{1.02} \approx f(1) + f'(1)\Delta x = 1 + \frac{1}{3} \times 0.02 \approx 1.0067$ 。

(2) 验证 $\Delta y = dy + o(\Delta x)$

- $\Delta y = (2 + 0.01)^3 - 2^3 = 2.01^3 - 8 = 8.120601 - 8 = 0.120601$;
- $dy = f'(2)\Delta x = 3(2^2) \times 0.01 = 12 \times 0.01 = 0.12$;
- 绝对误差 $\Delta y - dy = 0.000601 = 3(2)(0.01)^2 + (0.01)^3 = o(\Delta x)$ 。

一、误差传递公式

设某个物理量 $y = f(x)$, 测量误差为 Δx :

■ 绝对误差限: 设 $|\Delta x| \leq \delta_x$

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x_0)| |\Delta x| \leq |f'(x_0)| \delta_x$$

■ 相对误差限:

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \delta_x$$

二、工程案例:球体体积误差

测得球半径 $r = 10$ cm, 误差 $|\Delta r| \leq 0.01$ cm。体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 的误差估计:

■ $dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi(10^2) \times 0.01 \approx 12.57 \text{ cm}^3$;

■ 相对误差:

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3 \frac{dr}{r} = 3 \times \frac{0.01}{10} = 0.3\%$$

总结与反思

PART 4

一、两大核心概念的内在联系

- 导数:描述瞬时快慢(微观变化率、切线斜率、数值标量);
- 微分:描述增量替代(线性主部、以直代曲、具有量纲)。
- 纽带: $dy = f'(x)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$ 。

二、必须恪守的解题避坑要领

- 分段点求导:严禁直接代入导函数,牢记双闸门(先验证连续,再算差商极限);
- 抽象增量极限:严格凑配单点导数定义式,杜绝无前提的洛必达;
- 近似计算:基点 x_0 必选易算近点,切线误差量级为 $o(\Delta x)$ 。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料见课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。