

2-2 求导法则与求导技巧

第二章 一元函数微分学

- 1 基本求导法则与初等函数导数表
- 2 复合函数求导法则(链式法则)
- 3 对数求导法与特殊技巧
- 4 反函数求导法则
- 5 总结与反思

基本求导法则与初等函数导数表

PART 1

一、核心四则运算求导法则

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 在点 x 处可导, 则:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0)$$

二、积法则的推导精髓(交叉分解法)

考查乘积增量 $\Delta(uv)$ 的代数结构:

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v$$

两端同除以 Δx 并令 $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \underbrace{\Delta v}_{\rightarrow 0} \implies (uv)' = u'v + uv'$$

一、由求导四则(已证)两端同乘 dx , 即得微分四则

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 均可导, 对上页求导法则两端同乘自变量微分 dx :

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = v du + u dv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

二、对偶价值:为什么工程建模偏爱微分算子

- **自变量解耦**:微分法则完全脱离特定自变量,无需指明对谁求导;
- **直接线性化**:对等式整体施加微分算子 d ,比逐项写导数商更简洁迅捷。

原子基石:其推证始于导数定义(差商极限)

函数类型	导数公式(y')	微分公式(dy)
常数函数	$(C)' = 0$	$dC = 0$
幂函数	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx$
指数函数	$(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x$	$d(a^x) = a^x \ln a dx, d(e^x) = e^x dx$
对数函数	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}, d(\ln x) = \frac{dx}{x}$

对偶特征:每条微分公式同除以 dx 即得导数,同乘以 dx 即得微分。

基本初等函数导数与微分表:三角与反三角类

体系构建:由商法则与反函数求导法则系统导出

函数类型	导数公式 (y')
正弦/余弦	$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$
正切/余切	$(\tan x)' = \sec^2 x, \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$
反正弦/反余弦	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
反正切/反余切	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

微分形式:右列各式同乘 dx 即得(同上页对偶特征)。

方法溯源: $\sin, \cos$ 始于定义; $\tan, \cot$ 出于商法则;反三角成于反函数求导。

题:随堂抢答 2-2-1

口算求下列函数的导数(先用导数表,再用四则法则):

(1) $y = x^5 - 3x^2 + 7$; (2) $y = e^x \sin x$;

(3) $y = \frac{x^2}{1+x}$; (4) $y = \frac{\sin x}{1+x}$ 。

参考答案(口算核对)

- (1) $y' = 5x^4 - 6x$ (逐项线性 + 幂函数表);
- (2) $y' = e^x(\sin x + \cos x)$ (积法则 + 指数表);
- (3) $y' = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$ (商法则);
- (4) $y' = \frac{(1+x)\cos x - \sin x}{(1+x)^2}$ (商法则 + 三角表)。

复合函数求导法则（链式法则）

PART 2

严格建立一阶微分形式不变性(ε -增量代换)

一、把 $o(\Delta u)$ 改写为 $\varepsilon \cdot \Delta u$

设 $y = f(u)$ 在 u_0 处可微, $u = g(x)$ 在 x_0 处可微 ($u_0 = g(x_0)$)。由可微定义, 可写

$$\Delta y = f'(u_0) \Delta u + \varepsilon(\Delta u) \Delta u, \quad \varepsilon(\Delta u) \rightarrow 0 (\Delta u \rightarrow 0), \quad \varepsilon(0) := 0$$

(约定 $\varepsilon(0) := 0$, 使 $\Delta u = 0$ 时等式仍成立。)

二、代入 $\Delta u = g'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$

$$\Delta y = f'(u_0) [g'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)] + \underbrace{\varepsilon(\Delta u) \Delta u}_{= o(\Delta x)} = f'(u_0) g'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$$

($\varepsilon \rightarrow 0$ 且 $\Delta u = O(\Delta x)$, 故 $\varepsilon \cdot \Delta u = o(\Delta x)$ 。)

故 $dy = f'(u_0) g'(x_0) dx = f'(u_0) du$: 无论 u 是自变量还是中间变量, 微分形式 $dy = f'(u) du$ 保持不变。

链式法则：由不变性一步导出与微分层层剥

一、两端同除 dx ，一步即得链式法则

将 $dy = f'(u) du$ 两端同除 dx ：若 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 均可导，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

二、微分层层剥模型(逐层向内)

- 锁定外层主骨架函数 $f(\square)$ ；
- 套用不变性： $d(f(\square)) = f'(\square) d\square$ ，内层 $\square$ 原样照抄；
- 对 $d\square$ 递归剥层，直至最后一层为 dx ；
- 两端同除 dx ，提取 y' 。

高发易错警示：漏乘内层导数(误写 $(\sin 2x)' = \cos 2x$)；**内外层混求**(内层导数误入外层内部)。

例 2-2-1: 多层嵌套复合函数求导

题: 典型计算题 2-2-1

求下列复合函数的导数:

(1) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \quad (a > 0);$

(2) 设 $f(u)$ 为可导函数, $y = f(\sin^2 x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

例 2-2-1:规范解答与微分层层剥

规范解答

(1)对数根式嵌套——微分层层剥:

$$\begin{aligned} dy &= d\left[\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right] = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot d\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \end{aligned}$$

两端同除以 dx , 即得 $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ 。

(2)抽象复合——免设中间变量:

$$dy = d(f(\sin^2 x)) = f'(\sin^2 x) \cdot d(\sin^2 x) = f'(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x dx$$

两端同除以 dx , 即得 $\frac{dy}{dx} = f'(\sin^2 x) \sin 2x$ 。

对数求导法与特殊技巧

PART 3

一、降维魔力与适用场景

对数把乘除化为加减、幂次化为乘积,两类对象优先考虑:

- 幂指数函数 $y = u(x)^{v(x)}$ (底数与指数均含自变量);
- 多因子连乘、连除或高次开方的分式根式结构。

核心恒等式(微分算子本质):

$$d(\ln y) = \frac{dy}{y} \implies y' = y \cdot (\ln y)'$$

二、幂指数函数 $y = u^v$ 的双解法

- 方法 A(复合指数法): 改写为 $y = e^{v \ln u}$, 直接套用指数复合求导;
- 方法 B(对数微分算子法): $\ln y = v \ln u$, 两端取微分 $\frac{dy}{y} = d(v \ln u)$, 移项乘回 y 。

例 2-2-2: 幂指数函数与连乘积求导

题: 典型计算题 2-2-2

求下列函数的导数:

$$(1) y = x^{\sin x} \quad (x > 0);$$

$$(2) y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \quad (x > 4)。$$

例 2-2-2: 规范解答与对数压平展开

规范解答

(1) 幂指函数 $y = x^{\sin x}$: 两边取自然对数: $\ln y = \sin x \ln x$ 。两端取微分:

$$\frac{dy}{y} = d(\sin x \ln x) = \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

移项乘回 $y = x^{\sin x}$, 两端同除以 dx : $y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

(2) 多因子分式求导: 两边取对数: $\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)]$ 。

两端取微分:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right) dx$$

移项乘回、同除以 dx , 代回原式即得: $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right)$ ■

反函数求导法则

PART 4

反函数求导法则与微商倒数本质

一、核心反函数求导法则

设单调连续函数 $x = f(y)$ 可导且 $f'(y) \neq 0$, 则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 可导, 且:

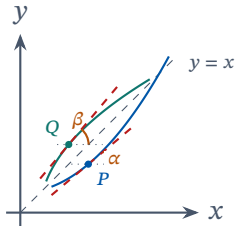
$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

二、微商倒数的诠释: 真正的商

一阶微商兑现为两微分之真正的商, 分子分母自然颠倒:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

求导运算退化为算术倒数。



蓝色 $y = f(x)$ 与青色 $y = f^{-1}(x)$ 关于 $y = x$ 对称;

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha \cdot \tan \beta = 1 \text{ (斜率之积)}$$

一、反正弦函数导数推导

设 $y = \arcsin x$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$), 反解 $x = \sin y$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(因 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时 $\cos y > 0$, 根号取正号。)

二、反正切函数导数推导

设 $y = \arctan x$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$), 反解 $x = \tan y$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

例 2-2-3: 反函数高阶导数转化辨析

题: 典型计算题 2-2-3

设函数 $x = x(y)$ 具备二阶导数且 $x'_y \neq 0$ 。求其反函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ (用 x 对 y 的导数表示)。

记号预备: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$, 即对一阶导数再求一次导 (n 阶导数的一般理论见第 4 讲)。

例 2-2-3: 规范解答与链式算子展开

规范解答

由反函数一阶求导公式:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'_y} = (x'_y)^{-1}$$

对自变量 x 再次求导, 注意内层是关于 y 的函数, 必须使用**链式法则**补充乘入 $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dy} ((x'_y)^{-1}) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= [-(x'_y)^{-2} \cdot x''_{yy}] \cdot \frac{1}{x'_y} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}\end{aligned}$$

核心避坑警示: 二阶导数**绝不能**简单取倒数! 即 $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{1}{d^2x/dy^2}$ 。

总结与反思

PART 5

一、核心方法选择路由

- 常规复合:由外向内链式剥洋葱;
- 幂指 / 多因子:取自然对数微分压平降维;
- 隐式 / 反函数:微商倒数与形式不变性;
- 分段函数:常规区间用公式,分段点回归定义。

二、算子核心思维沉淀

- 一阶微商符号是**两微分之真正的商**,可作四则拆拼;
- 一阶微分形式不变性统摄链式法则;
- 高阶导数**不再具备商的倒数性质**,必须严格沿链式算子展开!

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料见课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。