

2-3 非显式函数求导： 隐函数与参数方程

第二章 一元函数微分学

- 1 隐函数的求导法与代点极速法
- 2 参数方程确定的函数求导
- 3 总结与反思

隐函数的求导法与代点极速法

PART 1

一、显函数 vs 隐函数

- 显函数: $y = f(x)$, 因变量由自变量显式表达;
- 隐函数: $F(x, y) = 0$, 变量交织, 在局部确定单值对应 $y = y(x)$ 。

传统痛点: 很难或无法解出显式表达式 (例如 $y^5 + 2y - x = 0$)。

二、两边取微分算子引擎

由一阶微分形式不变性, 直接对等式两端施加微分算子 $d: d(F(x, y)) = 0$ 。

- 自动将因变量微分 dy 带出;
- 同除以 dx 即得微商 $\frac{dy}{dx}$;
- 也可视 y 为 x 的函数逐项链式求导 (殊途同归)。

点值求导核心铁律: 严禁符号化简, 必须即时代入数值!

- **传统误区**(耗时且易翻车): 符号通分移项提取 y' , 再用商法则强算二阶导, 式子膨胀至半页纸, 计算耗时巨大、符号抄错率极高;
- **极速法正道**(提速 80%): 原式两端取微分得含 dy 、 dx 的方程 $\rightarrow$ **立即代入点值** 解出比值 $\frac{dy}{dx}$; 微分方程继续取微分 $\rightarrow$ **再次代入数值** 解出 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ——全程纯数字四则解线性方程, 清爽稳健。

记号预备: $y'' = (y')'$, 即对一阶导数再求一次导 (n 阶导数的一般理论见第 4 讲)。

例 2-3-1: 隐函数在具体点的一阶与二阶导数

题: 典型计算题 2-3-1

设由方程 $e^y + xy - e = 0$ 确定了隐函数 $y = y(x)$ 。

求 $y'(0)$ 及 $y''(0)$ 的值。

例 2-3-1:规范解答(微分平衡法+代点极速)

规范解答

当 $x = 0$ 时,代入原方程得 $e^y + 0 - e = 0 \implies y(0) = 1$ 。

(1) 求一阶导数 $y'(0)$:原方程两端取微分: $e^y dy + x dy + y dx = 0$ 。立即代入 $x = 0, y = 1: e dy + dx = 0$,两端同除以 dx ,得 $y'(0) = -\frac{1}{e}$ 。

(2) 求二阶导数 $y''(0)$:对一阶微分方程两端再取一次微分(x 为自变量, $d^2x = 0$):

$$e^y(dy)^2 + e^y d^2y + 2 dx dy + x d^2y = 0$$

代入 $x = 0, y = 1, dy = -\frac{1}{e} dx$:

$$\frac{(dx)^2}{e} + e d^2y - \frac{2(dx)^2}{e} = 0 \implies e d^2y = \frac{(dx)^2}{e^2}$$

再由 $d^2y = d(y' dx) = y'' (dx)^2$,两端同除以 $(dx)^2$,得 $y''(0) = \frac{1}{e^2}$

题: 随堂练习 2-3-1

- (1) 求由 $x^2 + y^2 = 25$ 所确定的隐函数在点 $(3, 4)$ 处的切线方程;
- (2) 求由笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

参考答案

■ (1) 两端取微分: $2x dx + 2y dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; 在 $(3, 4)$ 处 $k = -\frac{3}{4}$, 切线为
 $3x + 4y = 25$;

■ (2) 两端取微分: $3x^2 dx + 3y^2 dy - 3(y dx + x dy) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$ 。

参数方程确定的函数求导

PART 2

一、一阶导数定理:两微分之真正的商,约去 dt

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 $y = y(x) (\varphi'(t) \neq 0)$ 。由一阶形式不变性,两端分别取微分:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t) dt}{\varphi'(t) dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

参数微分 dt 充当公共货币,分子分母自然相消。

二、切线与法线

参数 t_0 处切线: $y - \psi(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - \varphi(t_0))$; 法线将斜率换为负倒数 $-\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}$ 。

参数方程二阶导数:新参数方程再做一次一阶

注意:考研与期末最高频扣分陷阱

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{y''_t}{x''_t} \quad (\text{绝对严禁直接分子分母各自求二阶导!})$$

方法要领: y'_x 与 $x(t)$ 重新组合成新参数方程,再做一次一阶

记 $u = y'_x$ 。将 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ u = y'_x(t) \end{cases}$ 视为新的参数方程,它确定的正是 $u(x) = \frac{dy}{dx}$ 。对它再做一次一阶(微分之商):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \quad \text{展开得} \quad \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

一、极简两步记忆口诀

1. 第一步:将 y'_x 与 $x(t)$ 组成新参数方程,对参数 t 求导;
2. 第二步:千万不要忘记除以 x'_t ! 即 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ 。

二、深层机理:商的性质在高阶导数中丧失

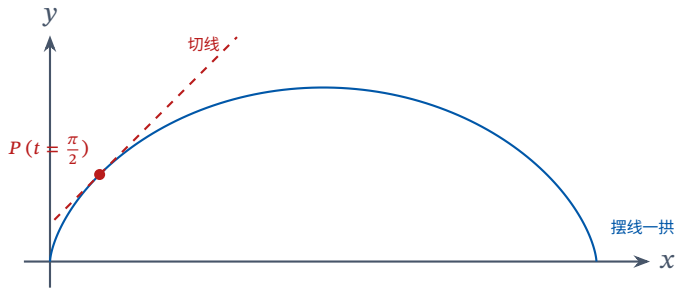
- 一阶导数: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ 是两微分之真正的商;
- 二阶导数: $\frac{d^2y}{dx^2}$ 是微分算子的迭代记号,不再是 d^2y 与 $(dx)^2$ 之商(记号辨析见第4讲:
 $d^2x \neq (dx)^2$, 自变量 $d^2x = 0$);
- 分母必须额外累乘一次 x'_t , 导致总分母为 $(x'_t)^3$ 。

例 2-3-2: 摆线的切线与二阶导数计算

题: 典型计算题 2-3-2

求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ ($a > 0$) 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

例 2-3-2:摆线的几何图景



摆线一拱($0 \leq t \leq 2\pi$): 滚轮上定点 P 的轨迹; 红色虚线为 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线位置。

例 2-3-2: 规范解答与微分之商

规范解答

(1) 计算一阶导数与切线方程:

$$dx = a(1 - \cos t) dt, \quad dy = a \sin t dt \implies \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t dt}{a(1 - \cos t) dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时: $x_0 = a(\frac{\pi}{2} - 1)$, $y_0 = a$, $k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1$ 。切线方程为:

$$y - a = 1 \cdot \left[x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \right] \implies x - y - a\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = 0。$$

(2) 计算二阶导数(新参数方程再做一次一阶): 对 $u = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ 关于 t 求导:

$$u'_t = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{1 - \cos t}$$

除以 $x'_t = a(1 - \cos t)$ 得 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}$; 代入 $t = \frac{\pi}{2}$ 得 $-\frac{1}{a}$

题: 随堂练习 2-3-2

(1) 椭圆 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (a, b > 0)$: 求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$;

(2) 抢答: 摆线在 $t = \pi$ (最高点) 处的切线是什么方向?

参考答案

$$\blacksquare (1) \frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(b/a) \csc^2 t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t};$$

$$\blacksquare (2) t = \pi \text{ 时 } y'_t = a \sin t = 0, \text{ 故 } \frac{dy}{dx} = 0: \text{切线水平 (摆线拱顶)}。$$

总结与反思

PART 3

一、隐函数求导精要

- 本质:利用一阶微分形式不变性对等式两端取微分;
- 提速:单点导数优先采用代点法,避免复杂符号化简。

二、参数方程求导精要

- 一阶导数:两微分之真正的商,约去参数微分 dt ;
- 二阶导数:算子迭代 $\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$,终身防范漏除分母 x'_t 。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料见课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。