

2-4 高阶导数与全章总结

第二章 一元函数微分学

- 1 高阶导数的概念与初等函数通项
- 2 高阶导数计算方法与莱布尼茨公式
- 3 形式不变性失效边界
- 4 导数与微分全章总结

高阶导数的概念与初等函数通项

PART 1

一、逐阶求导迭代定义

$f'(x)$ 仍可导时, 其导数称为 $f(x)$ 的**二阶导数**:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

一般地, $n-1$ 阶导数的导数称为 **n 阶导数**: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ 。

二、物理与几何诠释

- 位移 $s(t)$ 的二阶导为**加速度** $a(t)$;
- 几何上刻画切线斜率变化的快慢(曲线凹凸性, 预告: 第三章严格研究)。

记号防混淆: y^n 是 n 次幂, $y^{(n)}$ 是 n 阶导数; 四阶及以上统一带括号上标(如 $y^{(4)}$)。

四大类基本初等函数 n 阶导数公式

按四大函数族记忆(5 个通项):三角族每求导一次,相位前移 $\frac{\pi}{2}$

函数类型	n 阶导数公式 ($n \geq 1$)
指数函数	$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$
有理分式	$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$
对数函数	$(\ln(x+a))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+a)^n}$
正弦函数	$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$
余弦函数	$(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$

高阶导数计算方法 与莱布尼茨公式

PART 2

一、莱布尼茨公式 (Leibniz Formula)

若 $u(x), v(x)$ 均具备 n 阶导数, 则乘积的 n 阶导数满足:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(n)}v + n u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)}v'' + \cdots + u v^{(n)}$$

二、二项式定理完全同构

- 结构与初等代数 $(a+b)^n$ 完全对偶: 幂次换成求导阶数, 组合数系数 $\binom{n}{k}$ 一致;

三、多项式有限截断律

- m 次多项式因子的 $m+1$ 阶及以上导数全部恒等于 0——展开有限步截断!

题:典型计算题 2-4-1

求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$:

(1) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$ (有理分式裂项法);

(2) $y = (x^2 + 1)e^{2x}$ (莱布尼茨截断法)。

例 2-4-1:规范解答(三大武器实战)

规范解答

(1) 部分分式裂项法:分母因式分解并裂项: $y = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ 。套用公式:

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

(2) 莱布尼茨公式有限截断: 设 $u = e^{2x}, v = x^2 + 1 (v' = 2x, v'' = 2, v''' = 0, \text{三阶即死})$, 有限截断展开:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' \\ &= 2^n e^{2x}(x^2 + 1) + n2^{n-1}e^{2x}(2x) + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}e^{2x}(2) \\ &= 2^{n-2}e^{2x} [4(x^2 + 1) + 4nx + n(n-1)] \blacksquare \end{aligned}$$

题: 随堂练习 2-4-1

求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$:

(1) $y = \sin^2 x$ (提示: 先降幂 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$);

(2) $y = x e^{2x}$ (莱布尼茨截断法)。

参考答案

- (1) $y = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, 故 $y^{(n)} = -2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$ ($n \geq 1$; 验证 $n = 1$ 得 $\sin 2x$);
- (2) 莱布尼茨截断 ($v = x$, 二阶即死): $y^{(n)} = 2^n x e^{2x} + n \cdot 2^{n-1} e^{2x} = 2^{n-1} e^{2x} (2x + n)$ 。

形式不变性失效边界

PART 3

全书最重要底层边界之一:二阶形式不变性失效

若 $u = u(x)$ 是中间变量,则函数 $y = f(u)$ 的二阶微分**不再保持** $f''(u)(du)^2$ 的形式!

$$d^2y = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2u$$

严格推导揭秘“多余项”的数学起源

由乘积微分法则对一阶微分 $dy = f'(u)du$ 再次微分:

$$\begin{aligned} d^2y &= d(f'(u)du) = d(f'(u))du + f'(u)d(du) \\ &= (f''(u)du)du + f'(u)d^2u = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2u \end{aligned}$$

因 u 是中间变量, $d^2u = u''(x)(dx)^2 \neq 0$! 多出的一项破坏了形式不变性。

记号辨析: d^2x 是二阶微分, $(dx)^2$ 是一阶微分的平方,两者不同。 x 为自变量时 $d^2x = 0$,此时 $d^2y = f''(x)(dx)^2$,多余项消失。

一、真正的商 vs 算子记号辨析

- 一阶微商： $\frac{dy}{dx}$ 是两微分之真正的商；
- 高阶微商： $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$ 只是微分算子的迭代记号，**绝不是** d^2y 除以 $(dx)^2$ ！

二、一步解释两大经典陷阱

正因高阶微商不是商，以下“约分”全部失效：

$$\text{参数方程: } \frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{y''_t}{x''_t} \qquad \text{反函数: } \frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{1}{d^2x/dy^2}$$

（分别见 2-2 与 2-3 的避坑警示，其根源即本页的算子本质。）

导数与微分全章总结

PART 4

一、概念对偶特征

- 导数(快慢之度): 微观极限状态、切线瞬时斜率、标量性质;
- 微分(替代之术): 局域线性增量、以直代曲主部、具备几何与物理量纲;
- 纽带: $dy = f'(x) dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$ 。

二、微积分全书思想演进脉络(预告)

- 第二章(一阶近似): 以直代曲 $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ (一阶切线替代);
- 第三章(高阶多项式近似): 以曲代曲——泰勒公式高阶逼近(预告: 3-3 将建立);
- 第五章(微元累积求和): 无限分割求和 $\int_a^b f(x) dx$ (定积分累积)。

一、易错题型与高危陷阱

- 分段点求导:直接代入导函数或端点极限;
- 参数二阶导:误算为 $\frac{y_t''}{x_t''}$;
- 隐函数点值导:盲目符号通分移项;
- 幂指函数求导:当作普通幂函数或指数函数。

二、对应防御与核心解法武器

- 双闸门检验:连续闸门 + 差商定义闸门;
- 算子迭代: $\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, 必须除以 x'_t ;
- 代点极速法:求导立即代点,解线性方程;
- 对数压平法:取对数化幂指为乘积。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料见课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。