

1-6 第一章习题精讲 与思维训练

第一章：命题逻辑

- 1 题型一:命题符号化与语义避坑
- 2 题型二:真值表与公式分类判定
- 3 题型三:等值演算化简与等价证明
- 4 题型四:主范式计算与双向转换
- 5 题型五:形式推理证明大题精讲
- 6 全章总结:知识体系与思维进阶

命题符号化易错点 剖析与句型精讲

PART 1

题: 命题符号化实战

设命题变项:

- p : 天下雨; q : 地面湿; r : 我们在室外上体育课。

请将下列自然语言命题精确符号化:

1. 只有天下雨, 地面才会湿。
2. 除非天下雨, 否则我们在室外上体育课。
3. 天不下雨是我们在室外上体育课的充要条件。

1.1 例 1.6.1:解析与逻辑解构速查

题号	自然语言命题	标准符号化
(1)	只有 p , 才 q	$q \rightarrow p$
(2)	除非 p , 否则 r	$\neg p \rightarrow r$ 或 $p \vee r$
(3)	$\neg p$ 是 r 的充要条件	$\neg p \leftrightarrow r$

逻辑解构本质

前件与后件法则:

必要条件必须后置, 充分条件必须前置。“除非否则”即“若非前者则必发生后者”。

高频避坑红绿灯

- **易错 1:**“只有 p 才 q ”
错解: $p \rightarrow q \times$
正解: $q \rightarrow p \checkmark$ (p 是必要条件)
- **易错 2:**“除非 p 否则 r ”
错解: $p \rightarrow r \times$
正解: $\neg p \rightarrow r \checkmark$

题: 变式演练: 命题符号化

设命题变项:

- p : 天下雨; q : 地面湿; r : 我们在室外上体育课。

请将下列自然语言命题精确符号化:

1. 只要天下雨, 地面就会湿。
2. 只有地面湿, 天才会下雨。
3. 除非天下雨, 否则只要地面不湿, 我们就在室外上体育课。

1.2 变式 1.6.1:解析与逻辑解构

题号	自然语言命题	标准符号化
(1)	只要 p , 就 q	$p \rightarrow q$
(2)	只有 q , 才 p	$p \rightarrow q$
(3)	除非 p , 否则若 $\neg q$ 则 r	$\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$

语义等价规律剖析

“只要 p 就 q ”与“只有 q 才 p ”在逻辑上严格等价，前件充分而后件必要，均符号化为 $p \rightarrow q$ ！

复杂嵌套句破题法

- 外层优先：“除非 A 否则 B ”化为 $\neg A \rightarrow B$ ；
- 内层代入：令 B 为“若 $\neg q$ 则 r ”，即 $\neg q \rightarrow r$ ；
- 合体结果： $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$ ，亦等价于 $p \vee q \vee r$ 。

公式分类判定、偶然式与重言式速查

PART 2

题:公式分类判定

判断下列命题公式的类型(重言式、矛盾式或偶然式),并说明理由:

1. $A = (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
2. $B = (p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$

2.1 例 1.6.2:公式分类判定·推导演算

公式 A 的判定推演

待判公式: $A = (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \quad (\text{逆否等价}) \\ &\Leftrightarrow 1 \quad (\text{同一律}) \end{aligned}$$

结论: A 为重言式(永真式)。

成真赋值:全集 $\{00, 01, 10, 11\}$ 。

公式 B 的判定推演

待判公式: $B = (p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$

$$\begin{aligned} B &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q \\ &\Leftrightarrow ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \wedge \neg q \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge \neg q \\ &\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow 0 \end{aligned}$$

结论: B 为矛盾式(永假式)。

成真赋值:空集 $\emptyset$ 。

等值演算步骤规范 与高频定律组合

PART 3

3.1 例 1.6.3:复杂命题公式极简化简

题:等值演算综合题

利用基本等值式化简命题公式:

$$A = \neg(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge (q \vee r))$$

3.1 例 1.6.3: 复杂命题公式极简化简·推导演算

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \wedge (q \vee r)) && \text{(消蕴涵律)} \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge (q \vee r)) && \text{(德·摩根律)} \\ &\Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \wedge [(p \wedge \neg q) \vee (q \vee r)] && \text{(分配律)} \\ &\Leftrightarrow [(p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \wedge [p \vee q \vee r \vee \neg q] && \text{(分配律)} \\ &\Leftrightarrow [1 \wedge (\neg p \vee \neg q)] \wedge [p \vee 1 \vee r] && \text{(排中律)} \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge 1 \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q && \text{(同一律)} \end{aligned}$$

最简结果: $\neg p \vee \neg q$ (即 $\neg(p \wedge q)$ 或 $p \rightarrow \neg q$)

PDNF / PCNF 互补 转换与等值判定

PART 4

4.1 例 1.6.4:主范式与真假赋值标准求解

题:主范式与赋值标准求解

用等值演算求命题公式 $A = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r)$ 的主析取范式 (PDNF)、主合取范式 (PCNF)、成真赋值与成假赋值。

第一步: 化为析取范式 (DNF)

$$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$$

第二步: 扩充缺失变项展开为极小项

$$\blacksquare \neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r) \Leftrightarrow m_1 \vee m_0$$

$$\blacksquare \neg p \wedge \neg r \Leftrightarrow \neg p \wedge (q \vee \neg q) \wedge \neg r \Leftrightarrow m_2 \vee m_0$$

$$\blacksquare q \wedge \neg r \Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge q \wedge \neg r \Leftrightarrow m_6 \vee m_2$$

合并重言极小项得 PDNF:

$$\text{PDNF}(A) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_6 = \sum m(0, 1, 2, 6)$$

第三步:利用极大项与极小项互补关系求 PCNF

3 个命题变项的极小项下标全集为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 。

未在 $\text{PDNF}(A)$ 中出现的下标集合为:

$$\{0, 1, \dots, 7\} \setminus \{0, 1, 2, 6\} = \{3, 4, 5, 7\}$$

由主合取范式与主析取范式的对偶关系,直接写出:

$$\text{PCNF}(A) = \prod M(3, 4, 5, 7) = M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_7$$

展开形式: $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 。

4.1 例 1.6.4:求解步骤 (三) ·成真赋值与成假赋值

成真赋值(对应极小项下标)

$$\text{PDNF}(A) = \sum m(0, 1, 2, 6)$$

各极小项对应的二进制编码:

$$\blacksquare m_0 \implies (0, 0, 0)$$

$$\blacksquare m_1 \implies (0, 0, 1)$$

$$\blacksquare m_2 \implies (0, 1, 0)$$

$$\blacksquare m_6 \implies (1, 1, 0)$$

成真赋值:

$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)$

成假赋值(对应极大项下标)

$$\text{PCNF}(A) = \prod M(3, 4, 5, 7)$$

各极大项对应的二进制编码:

$$\blacksquare M_3 \implies (0, 1, 1)$$

$$\blacksquare M_4 \implies (1, 0, 0)$$

$$\blacksquare M_5 \implies (1, 0, 1)$$

$$\blacksquare M_7 \implies (1, 1, 1)$$

成假赋值:

$(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)$

速记要领:极小项下标二进制即成真赋值,极大项下标二进制即成假赋值。二者互补。

4.2 变式 1.6.4: 嵌套蕴涵公式的主范式与赋值

题: 变式演练: 真题同款主范式求解

用等值演算求命题公式 $A = (r \rightarrow q) \rightarrow p$ 的主析取范式 (PDNF)、主合取范式 (PCNF)、成真赋值与成假赋值。

4.2 变式 1.6.4:求解步骤 (一) • 等值演算化简求 PDNF

第一步:消去蕴涵联结词化为析取项

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \neg(r \rightarrow q) \vee p && \text{(消外层蕴涵)} \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg r \vee q) \vee p && \text{(消内层蕴涵)} \\ &\Leftrightarrow (r \wedge \neg q) \vee p && \text{(德·摩根律与双重否定律)} \end{aligned}$$

第二步:补齐缺失变项展开为极小项(按变项顺序 p, q, r)

$$\blacksquare r \wedge \neg q \Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge \neg q \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \Leftrightarrow m_5 \vee m_1$$

$$\blacksquare p \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r) \Leftrightarrow m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

合并重言极小项得 PDNF:

$$\text{PDNF}(A) = m_1 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 = \sum m(1, 4, 5, 6, 7)$$

PCNF 互补直写

下标全集 $\{0, 1, \dots, 7\}$, 未出现者为 $\{0, 2, 3\}$:

$$\text{PCNF}(A) = \prod M(0, 2, 3) = M_0 \wedge M_2 \wedge M_3$$

展开形式:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)。$$

成真与成假赋值

成真赋值(极小项二进制):

$$\blacksquare m_1 \rightarrow (0, 0, 1), \quad m_4 \rightarrow (1, 0, 0)$$

$$\blacksquare m_5 \rightarrow (1, 0, 1), \quad m_6 \rightarrow (1, 1, 0), \\ m_7 \rightarrow (1, 1, 1)$$

即:

$$(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$$

成假赋值(极大项二进制):即:

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)$$

自然语言破案推理 与形式逻辑证明

PART 5

题: 推理证明大题

构造下列推理的证明:

前提: $p \rightarrow (q \vee r)$, $\neg q$, $s \rightarrow \neg r$

结论: $p \rightarrow \neg s$

5.1 例 1.6.5:规范证明步骤

:结论为条件式 $p \rightarrow \neg s$,采用附加前提法 (CP), 设 p 为附加前提,推导 $\neg s$ 。

行号	公式	依据规则 / 前件行号
(1)	p	附加前提引入 (CP)
(2)	$p \rightarrow (q \vee r)$	前提引入 (P)
(3)	$q \vee r$	(1)(2) 分离规则 (MP)
(4)	$\neg q$	前提引入 (P)
(5)	r	(3)(4) 析取三段论 (DS)
(6)	$s \rightarrow \neg r$	前提引入 (P)
(7)	$\neg \neg r$	(5) 双重否定律
(8)	$\neg s$	(6)(7) 拒取规则 (MT)
(9)	$p \rightarrow \neg s$	(1)–(8) CP 规则导出结论

证毕 ■

题: 变式演练: 反证法形式推理

构造下列推理的反证法证明:

前提: $p \rightarrow q$, $q \rightarrow \neg r$, r

结论: $\neg p$

5.2 变式 1.6.5: IP 规则反证推导全过程

: 结论为否定命题 $\neg p$, 采用归谬法 (IP), 引入否定结论 p 作为假设前提, 推导矛盾式 0。

行号	公式	依据规则 / 前件行号
(1)	p	反设前提引入 (IP 假设)
(2)	$p \rightarrow q$	前提引入 (P)
(3)	q	(1)(2) 假言推理 (MP)
(4)	$q \rightarrow \neg r$	前提引入 (P)
(5)	$\neg r$	(3)(4) 假言推理 (MP)
(6)	r	前提引入 (P)
(7)	$r \wedge \neg r$	(5)(6) 合取引入 (T 规则, 导出矛盾 0)
(8)	$\neg p$	(1)–(7) IP 规则导出结论

证毕 ■

题:自然语言推理应用题

在一起涉及商业机密泄露事件中,调查确认以下事实:

1. 只有 B 是商业间谍,C 才是商业间谍;
2. 如果 C 不是商业间谍,则 D 是商业间谍;
3. 或者 A 是商业间谍,或者 B 不是商业间谍;
4. 现已查明 A 不是商业间谍。

请用推理方法查出谁是真正的商业间谍(先进行命题符号化,再构造有效推导)。

设命题变项

- p :A 是商业间谍
- q :B 是商业间谍
- r :C 是商业间谍
- s :D 是商业间谍

目标与解题策略

将调查事实形式化为已知前提集合,利用自然推理规则推出单变项真结论。

调查条件符号化(前提集)

1. “只有 B 才 C”: $r \rightarrow q$
(q 为必要条件,后件置于箭头后)
2. “如果 $\neg C$ 则 D”: $\neg r \rightarrow s$
3. “或者 A 或者 $\neg B$ ”: $p \vee \neg q$
4. “A 不是间谍”: $\neg p$

前提集合:

$$\Gamma = \{r \rightarrow q, \neg r \rightarrow s, p \vee \neg q, \neg p\}$$

5.3 例 1.6.6:求解步骤 (二) ·形式推理推演与破案结论

构造证明推导序列:

行号	公式	依据规则 / 前件行号
(1)	$p \vee \neg q$	前提引入 (P)
(2)	$\neg p$	前提引入 (P)
(3)	$\neg q$	(1)(2) 析取三段论 (DS)
(4)	$r \rightarrow q$	前提引入 (P)
(5)	$\neg r$	(3)(4) 拒取式 (MT)
(6)	$\neg r \rightarrow s$	前提引入 (P)
(7)	s	(5)(6) 假言推理 (MP)

结论还原(自然语言结案)

推导得出 s 为真,故D 是真正的商业间谍。

考试易错点警示

- 条件 (1) 易错写成 $q \rightarrow r$;
- 答题不可只写符号,末尾须还原文字。

第一章：命题逻辑 全景复盘与进阶导引

PART 6

五层知识逻辑链

- **语言层**: 原子命题 $\rightarrow$ 联结词 $\rightarrow$ 符号化建模
- **语义层**: 真值赋值 $\rightarrow$ 真值表 $\rightarrow$ 公式分类判定
- **代数层**: 等值定律 $\rightarrow$ 等值演算极简化简
- **范式层**: 极小/极大项 $\rightarrow$ 主范式及真假赋值
- **推理层**: 自然推理规则 $\rightarrow$ 直接法 / CP 规则

五大题型核心通法

- **符号化**: 紧抓“必要条件后置”前件与后件
- **公式判定**: 代数化简为主, 真值表验证为辅
- **等值演算**: 消蕴涵、德·摩根律与双向分配律
- **主范式**: 代数展开求极小项, 下标补集求对偶
- **形式推理**: 条件结论优先 CP, 每步标明依据

命题逻辑的内在局限

“黑盒子”瓶颈:

命题逻辑将简单命题视作不可分割的整体,无法刻画命题内部的“客体、属性与数量关系”。

典型困境(苏格拉底三段论):

- “所有人都是要死的”(p)
- “苏格拉底是人”(q)
- 结论:“苏格拉底是要死的”(r)

在命题逻辑中: $p, q \not\vdash r$ (无法形式推导!)

下章飞跃:一阶谓词逻辑

打破黑盒子,深入命题内部:

引入更强大的描述工具:

- 个体词与谓词:刻画客体与性质(如 $H(x)$ 表示 x 是人)
- 量词引入:全称量词 $\forall$ 与存在量词 $\exists$

精准刻画三段论:

$\forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s) \implies M(s)$
(完美实现自然推导 ✓)

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。