

2-1 一阶逻辑基本概念

第二章： 一阶逻辑

- 1 命题逻辑的局限性与突破
- 2 个体词与个体域
- 3 谓词与命题函数
- 4 量词与符号化两大黄金法则
- 5 经典符号化实例精讲
- 6 本节小结与知识图谱

命题逻辑的局限性：苏格拉底三段论与谓词引入

PART 1

1.1 苏格拉底三段论:命题逻辑为何“失灵”?

古希腊经典三段论

1. **大前提**: 凡是人都要死。
2. **小前提**: 苏格拉底是人。
3. **结论**: 苏格拉底是要死的。

命题逻辑符号化:

- 设 p : 凡是人都要死; q : 苏格拉底是人;
 r : 苏格拉底要死
- 推理形式: $(p \wedge q) \rightarrow r$

失灵根源剖析

- 真值检验: 取 $p = 1, q = 1, r = 0$, 则
 $(p \wedge q) \rightarrow r = 0$
- 推理形式**不是重言式** $\Rightarrow$ 命题逻辑无法判定这一有效推理!

根本局限: 简单命题被当作不可分割的“原子”——

- 无法刻画**客体**(苏格拉底)与**性质**(人、要死)
- 无法刻画**量化范围**(凡是、所有)

个体常项、个体变项 与论域（全总个体域）

PART 2

2.1 个体词:常项、变项与个体域

定义 2-1.1:个体词

研究对象中可以独立存在的客体(具体事物或抽象概念)。

按取值方式分类:

- 个体常项:表示具体确定的客体
记号: a, b, c (如 s 代表苏格拉底)
- 个体变项:表示未指定的抽象客体
记号: x, y, z

个体域 (Domain) 的两种形态

个体域 D :个体变项的取值范围。

- 特定个体域:如 $\mathbb{N}$ 、 $\mathbb{R}$ 、全体学生
- 全总个体域:宇宙间一切事物构成的集合

特性谓词的引入

未指明个体域时,默认取全总个体域,此时必须引入特性谓词(如 $M(x)$:“ x 是人”)限定讨论范围。

性质、关系、谓词元数与命题函数

PART 3

定义 2-1.2:谓词 (Predicate)

刻画客体性质或客体间相互关系的词,用大写字母 $P, Q, R, F, G, L, \dots$ 表示。

按元数 (Arity) 分类:

- 一元谓词:刻画客体性质
 $F(x)$: x 是素数; $M(x)$: x 是人
- n 元谓词:刻画 n 个客体间的关系
 $L(x, y)$: x 大于 y
- 零元谓词:不含个体变项的常量命题

命题函数:从开句到命题

含个体变项的谓词表达式(如 $F(x)$ 、 $L(x, y)$)称为命题函数。

关键属性:

- 真值未定,本身不是命题
- 化为命题的两条路径:
 1. 代入个体常项: $F(2)$ (2 是素数,值为 1)
 2. 前面加量词: $\forall x F(x)$

全称量词、存在量 词与两大标准公式

PART 4

4.1 全称量词与存在量词

1. 全称量词 (Universal)

符号: $\forall x$

对应语句: “对所有的 x ” “每一个” “任意的” “凡是”。

$$\forall x P(x)$$

论域中一切个体 x 都使 $P(x)$ 成立。

2. 存在量词 (Existential)

符号: $\exists x$

对应语句: “存在一个 x ” “至少有一个” “有的”。

$$\exists x P(x)$$

论域中至少存在一个个体 x 使 $P(x)$ 成立。

有限论域展开 ($D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$):

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n) \text{ (广义合取)}$$

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n) \text{ (广义析取)}$$

4.2 符号化两大黄金法则

法则一:全称量词配蕴涵

“凡是 F 都是 G ”符号化为:

$$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$$

错写成 $\forall x (F(x) \wedge G(x))$?

含义变为“宇宙间一切客体既是 F 又是 G ”(连桌子、石头都得算),严重违背事实!

法则二:存在量词配合取

“存在有的 F 是 G ”符号化为:

$$\exists x (F(x) \wedge G(x))$$

错写成 $\exists x (F(x) \rightarrow G(x))$?

只要论域中抓到一个非 F 客体(前件为假),整句便平凡为真,断言失效!

铁律:全称量词配蕴涵,存在量词配合取,绝不可混淆!

经典例题：正负数、有理无理数与量词顺序

PART 5

题:在一阶逻辑中将下列命题符号化(全总个体域)

1. 正数都大于负数。
2. 有的无理数大于有的有理数。

思考方向:两小题各对应哪条黄金法则?“都大于”需要怎样的量词嵌套?先在草稿纸上写出特性谓词 F, G 与关系谓词 L 。

(1) 正数都大于负数

设定谓词: $F(x)$: x 是正数; $G(y)$: y 是负数;
 $L(x, y)$: $x > y$ 。

嵌套形式:

$$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow L(x, y)))$$

前束等价形式:

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow L(x, y))$$

(2) 有的无理数大于有的有理数

设定谓词: $F(x)$: x 是无理数; $G(y)$: y 是有理数;
 $L(x, y)$: $x > y$ 。

嵌套形式:

$$\exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge L(x, y)))$$

前束等价形式:

$$\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))$$

方法沉淀:先写嵌套形式(量词紧贴各自特性谓词),再借助辖域收缩与扩张律前束化为单串量词。

5.2 量词顺序的敏感性: $\forall x \exists y$ 与 $\exists y \forall x$

设论域为全体人类, $L(x, y)$: “ x 喜欢 y ”。

$\forall x \exists y L(x, y)$

解读: 每个人 x , 都存在自己喜欢的人 y 。

“每个人都有自己喜欢的人。”

要点: 喜欢的对象可以因人而异。

$\exists y \forall x L(x, y)$

解读: 存在一个特定的人 y , 被所有人共同喜欢。

“存在一个被所有人共同喜欢的人。”

要点: 要求存在大众焦点, 条件苛刻得多。

方向定理: $\exists y \forall x L(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y L(x, y)$, 但逆向不成立——量词顺序不可随意调换!

本节小结与知识图谱

PART 6

一、三大基本元素

- 个体词:常项 a, s vs 变项 x, y
- 个体域 D :特定域 vs 全总域(配特性谓词)
- 谓词:性质 $F(x)$ 与关系 $L(x, y)$
- 量词:全称 $\forall$ 与存在 $\exists$

二、符号化核心铁律

- 全称配蕴涵: $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$
- 存在配合取: $\exists x (F(x) \wedge G(x))$
- 量词顺序: $\forall \exists$ 与 $\exists \forall$ 不可互换

在线主页与课程资源

- 个人主页:

<https://matnoble.top>

- 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

- GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。