

2-2 合式公式与解释

第二章：一阶逻辑

- 1 引入:语法与语义的双重维度
- 2 一阶逻辑合式公式 (WFF)
- 3 量词辖域与变元状态分析
- 4 一阶逻辑的解释 (Interpretation)
- 5 一阶逻辑公式的分类
- 6 本节小结与知识图谱

从符号串到数学意义：语 法 (Syntax) vs 语义 (Semantics)

PART 1

一、两个根本问题

对上一节建立的符号串

$$\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$$

1. 语法问题 (Syntax):

书写规则是否合法? 量词作用范围到哪里结束?

⇒ **合式公式 (WFF)**

2. 语义问题 (Semantics):

它代表什么含义? 它是真还是假?

⇒ **解释 (Interpretation)**

二、工程直观:编译器的两大阶段

■ **语法分析**:编译器先检查源码结构合法性,生成抽象语法树 (AST)——对应 **WFF** 判定

■ **运行时环境**:再在具体环境中赋予语义并求值——对应**解释求真值**

一句话:一阶逻辑“先验语法、后赋语义”的思想,正是现代编译器与程序语言的计算哲学源头!

原子公式、递归构造与语法规则

PART 2

2.1 一阶逻辑合式公式的递归定义

定义 2-2.1: 原子谓词公式

设 P 是 n 元谓词, $t_1, \dots, t_n$ 是项, 则

$$P(t_1, \dots, t_n)$$

称为原子谓词公式。

项 (Terms): 个体常项和个体变项统称为项。

定义 2-2.2: WFF 递归法则

1. 原子谓词公式是合式公式;
2. 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是;
3. 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$ 也是;
4. 若 A 是合式公式, x 是个体变项, 则 $(\forall xA)$ 、 $(\exists xA)$ 也是;
5. 有限次应用 1-4 得到的符号串才是合式公式。

指导变元、辖域判定、约束与自由变元

PART 3

一、基本结构定义

在 $\forall xA$ 或 $\exists xA$ 中:

- **指导变元**: 紧跟量词之后的变项 x
- **辖域 (Scope)**: 受该量词作用的子公式 A

辖域边界判定:

- 量词 $\forall, \exists$ 的优先级**最高** (高于一切联结词)
- 量词后紧跟**括号**: 辖域为整个括号内
- **无括号**: 辖域仅到紧随的**第一个原子公式**!

二、即时辨析: 辖域到哪里结束?

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x)$
辖域 = $(P(x) \rightarrow Q(x))$
2. $\forall xP(x) \rightarrow Q(x)$
辖域仅 = $P(x)$!

避坑警示

括号缺失会使辖域**意外收缩**:

$\forall xP(x) \rightarrow Q(x)$ **绝不等于**
 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 。

3.2 约束变元 (Bound) 与自由变元 (Free)

定义 2-2.3: 变元的两种身份

- **约束变元**: 在某量词辖域内出现、且与指导变元同名的变项
- **自由变元**: 不受任何同名量词约束的变项

双重身份并存 (同一变项名可两种出现兼有):

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x)$$

括号内两个 x 为**约束出现**, 末尾红色 x 为**自由出现**。

定义 2-2.4: 闭式 (Sentence)

若公式 G 中**不含任何自由变项**, 则称 G 为**闭式** (亦称句子)。

语义意义:

- 闭式的真假完全由解释决定
- 不再依赖外界向自由变元代入的具体参数
- 只有闭式才可直接谈论“真”或“假”

解释的严格数学定义与真值求值

PART 4

4.1 一阶逻辑解释 ($\mathcal{I}$) 的定义

定义 2-2.5: 解释 $\mathcal{I}$

一个解释 $\mathcal{I}$ 包含四个层面的赋值约定:

1. 规定一个非空个体域 D
2. 为每个个体常项指定 D 中一个具体元素
3. 为每个 n 元函数符号指定映射 $D^n \rightarrow D$
4. 为每个 n 元谓词符号指定真值关系 $D^n \rightarrow \{0, 1\}$

语义的相对性

同一公式在不同解释下可得出完全不同的真值:

$$\forall x \exists y (x < y)$$

- $\mathcal{I}_1: D = \mathbb{R}, < \text{为小于} \Rightarrow \text{1 (实数无最大者)}$
- $\mathcal{I}_2: D = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \text{0 (最大数 3 后无更大数)}$

4.2 例 2-2:在具体解释下求解公式真值

题:分别计算下列公式在解释 $\mathcal{I}$ 下的真值

设解释 $\mathcal{I}$:

- 个体域 $D = \{2, 3\}$
- 谓词 $P(x):x$ 是素数; $E(x):x$ 是偶数; $L(x, y):x < y$

1. $A_1 = \forall x P(x)$
2. $A_2 = \exists x E(x)$
3. $A_3 = \forall x \exists y L(x, y)$

思考方向:有限论域下 $\forall$ 与 $\exists$ 分别展开为什么联结词? A_3 中外层 x 逐一取 2, 3 时, 内层 $\exists y$ 各自能否满足?

4.2 例 2-2:有限论域展开推导

1. 公式 $A_1 = \forall xP(x)$:全称转广义合取

$$A_1 \Leftrightarrow P(2) \wedge P(3)$$

2 与 3 均为素数, $P(2) = 1, P(3) = 1$, 故真值为 **1**。

2. 公式 $A_2 = \exists xE(x)$:存在转广义析取

$$A_2 \Leftrightarrow E(2) \vee E(3)$$

2 是偶数, $E(2) = 1$, 故真值为 **1**。

3. 公式 $A_3 = \forall x\exists yL(x, y)$:外层逐一检验

- $x = 2$:需 $\exists yL(2, y)$, 取 $y = 3, 2 < 3$ 成立 ✓
- $x = 3$:需 $\exists yL(3, y)$, 但 $y \in \{2, 3\}$ 均不满足 $3 < y$ ✗

故真值为 **0**。



通法:有限论域求值 = “ $\forall$ 转 $\wedge$ 、 $\exists$ 转 $\vee$ ”逐层展开,再逐项判真假。

逻辑有效式、矛盾式与可满足式

PART 5

5.1 一阶逻辑公式的分类

1. 逻辑有效式 (Valid)

在任何解释 $\mathcal{I}$ 下真值恒为 **1** (永真式)。

典型示例:

■ $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$

■ $P(x) \vee \neg P(x)$

2. 矛盾式 (Unsatisfiable)

在任何解释下真值恒为 **0** (永假式)。

典型示例:

■ $\forall xP(x) \wedge \neg \forall xP(x)$

■ $\exists xP(x) \wedge \forall x\neg P(x)$

3. 可满足式 (Satisfiable)

至少存在一个解释使公式为真。

细分: 含逻辑有效式, 以及真假随解释而变的偶然式。

类比: 与命题逻辑“永真 / 永假 / 可满足”三分法完全平行, 只是把“赋值”换成了“解释 $\mathcal{I}$ ”。

本节小结与知识图谱

PART 6

一、语法结构

- **合式公式 (WFF)**: 原子公式 + 联结词 + 量化递归构成
- **量词辖域**: 优先级最高, 括号界定范围
- **变元身份**: 约束变元 vs 自由变元
- **闭式**: 无自由变元的完整句子

二、语义解释

- **解释 I** : 非空论域 D + 常项 / 函数 / 谓词指派
- **真值求解**: $\forall$ 转合取, $\exists$ 转析取
- **公式分类**: 逻辑有效式、矛盾式、可满足式

在线主页与课程资源

- 个人主页:

<https://matnoble.top>

- 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

- GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。