

2-3 一阶逻辑等值演算与前束范式

第二章：一阶逻辑

- 1 引入:苏格拉底的逻辑变形
- 2 一阶等值演算三大基本规则
- 3 常用一阶逻辑等值式系统
- 4 前束范式 (Prenex Normal Form)
- 5 前束范式综合实战演练
- 6 本节小结与知识图谱

自然语言的多样表达与数学等价证明

PART 1

1.1 [Try This First] 两种表述在数学上是否同一？

一、同一命题的两种符号化

命题：“并非所有人都是要死的。”

字面直译(否定全称)：

$$\neg \forall x (M(x) \rightarrow D(x))$$

意译表述(存在不死的人)：

$$\exists x (M(x) \wedge \neg D(x))$$

二、数学证明的诉求

- 直觉告诉我们：两句话含义相同
- 但直觉**不算证明**——如何像代数恒等式 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 一样，依靠**一阶逻辑等值定律**逐步推演出二者的恒等性？

本节任务：建立一阶逻辑的“代数变形系统”——等值演算律。

置换规则、代替规则与换名规则

PART 2

2.1 等值演算的三把“手术刀”

1. 置换规则

若 $A \Leftrightarrow B$, 则

$$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$$

用途:对公式的局部子式做等值替换, 不改动其余骨架。

2. 代替规则

命题逻辑中的任意重言式, 将命题变项**统一代换**为一阶公式后, 仍是一阶有效式。

用途:命题等值律(德·摩根、分配等)可直接搬进一阶公式使用。

3. 换名规则

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow \forall y A(y)$$

$$\exists x A(x) \Leftrightarrow \exists y A(y)$$

限制:新名 y 不得在 $A(x)$ 中自由出现; 辖域内同名变项须同步全换。

量词否定、量词分配与辖域收缩扩张律

PART 3

3.1 量词否定律 (Quantifier Negation Laws)

否定号 $\neg$ 穿透量词时,量词必须**翻转形态**(全称变存在,存在变全称):

定理 2-3.1:量词否定律

应用:前引谜题的严格证明

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

生活直觉:

- “并非所有人都诚实” $\Leftrightarrow$ “有人不诚实”
- “不存在会飞的猪” $\Leftrightarrow$ “所有猪都不会飞”

$$\neg \forall x (M(x) \rightarrow D(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg (M(x) \rightarrow D(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg (\neg M(x) \vee D(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (M(x) \wedge \neg D(x))$$

结论:两句自然语言在数学上严格等价! ■

3.2 量词分配律与单向蕴涵陷阱

定理 2-3.2:完全等值分配

$\forall$ 对 $\wedge$ 完全分配:

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$\exists$ 对 $\vee$ 完全分配:

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

高频考点:仅单向蕴涵

$\forall$ 对 $\vee$ 只能单向:

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$\exists$ 对 $\wedge$ 只能单向:

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

反向蕴涵均不成立!

反例直觉: 设 $A(x)$: “ x 是偶数”, $B(x)$: “ x 是奇数”, 论域 $\mathbb{Z}$:
 $\forall x (A(x) \vee B(x))$ 为真 (整数非偶即奇), 但 $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ 为假!

3.3 量词辖域收缩与扩张律

前提:公式 B 中不包含变项 x 的自由出现,则量词可越过 B 收缩或扩张:

与、或联结(量词形态不变)

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$$

蕴涵联结(前件位置量词翻转!)

$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B$$

$$\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$$

$$\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$$

原理: $A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A(x) \vee B$,量词作用于否定前件时发生翻转。

前束范式 (PNF) 定义与四步转换算法

PART 4

4.1 前束范式 (PNF, Prenex Normal Form)

定义 2-3.3: 前束范式

形如

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_k x_k M(x_1, \dots, x_k)$$

的公式称为前束范式, 其中:

- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, 前端连串称为**量词前缀**
- M 称为**母式**, 其中**不含任何量词**

定理 2-3.4: 存在定理

任何一阶逻辑公式都存在与之等值的前束范式。

工程直观: 自动定理证明的标准输入

量词统一提到最前端后, 可经 **Skolem 化** 消去存在量词, 转化为机器可消解计算的子句集。

4.2 化前束范式“四步标准化算法”

将任意一阶公式化为前束范式,按部就班执行四步:

1. **Step 1 消联结词:**

利用蕴涵等值式与等价等值式,将全式仅用 $\neg, \wedge, \vee$ 表达。

2. **Step 2 否定内移:**

利用量词否定律(德·摩根扩展),将 $\neg$ 全部深入到原子谓词之前。

3. **Step 3 换名:**

使用换名规则,使各量词指导变元**互不相同**,且不与自由变元同名。

4. **Step 4 量词外提:**

利用辖域收缩与扩张律,将量词统一提到最左端,保持原相对顺序。

经典例题剖析与逐步推演演示

PART 5

5.1 例 2-3:求一阶公式的前束范式

题:将公式 $A = \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x, y)$ **化为前束范式**

提示:公式中前后两处 x 分别受不同量词约束,且 y 为自由变元。

思考方向:主联结词是 $\rightarrow$, 第一步先把 A 改写为什么形式? 否定号越过 $\forall x$ 时量词形态如何变化? 两个量词都叫 x , 外提前需要先做什么?

5.1 例 2-3: 四步推演与规范解答

解:

1. 消蕴涵:

$$A \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x, y)$$

2. 否定内移($\neg$ 越过 $\forall x$ 翻转为 $\exists x$):

$$A \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x, y)$$

3. 换名(右侧约束变元 x 改为 z , 消除同名冲突):

$$A \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists z Q(z, y)$$

4. 量词外提(B 中无 x 自由出现, 可越 $Q(z, y)$ 提取):

$$A \Leftrightarrow \exists x \exists z (\neg P(x) \vee Q(z, y))$$

前缀 $\exists x \exists z$, 母式不含量词, 即为标准前束范式。

口诀: 一消 $\rightarrow$ 、二移 $\neg$ (量词翻转)、三换名、四外提 (保序)。

本节小结与知识图谱

PART 6

一、一阶等值定律

- 量词否定律: $\neg \forall \Rightarrow \exists \neg$; $\neg \exists \Rightarrow \forall \neg$
- 分配律: $\forall$ 配 $\wedge$ 、 $\exists$ 配 $\vee$ 完全分配
- 不对称性: $\forall$ 配 $\vee$ 、 $\exists$ 配 $\wedge$ 仅单向蕴涵
- 前件翻转:
 $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$

二、前束化四步法

- 1. 消蕴涵: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- 2. 否定内移: $\neg$ 穿透量词时翻转形态
- 3. 换名: 消除量词间同名冲突
- 4. 外提: 量词统一提至最左端且保序

在线主页与课程资源

- 个人主页:

<https://matnoble.top>

- 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

- GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。