

2-4 一阶逻辑形式推理理论

第二章： 一阶逻辑

- 1 引入:苏格拉底证明的终极判决
- 2 全称量词推理规则 (US / UG)
- 3 存在量词推理规则 (IS / EG)
- 4 一阶形式推理综合实战
- 5 第一部分:数理逻辑全篇总结

从哲学直觉到数理严格证明的最后一公里

PART 1

一、回顾苏格拉底三段论

- **前提 1:** $\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$ (凡人皆有死)
- **前提 2:** $M(s)$ (苏格拉底是人)
- **结论:** $D(s)$ (苏格拉底会死)

技术瓶颈

命题逻辑的 9 大推理规则无法直接操作量词 $\forall x$ 内部的表达式。

二、一阶推理三步路线

1. **脱外壳:** 用指定规则 (US / IS) 消去量词, 化为命题形式
2. **代数推导:** 用命题逻辑推理规则 (MP, MT, HS, DS 等) 推演
3. **戴回帽子:** 必要时用推广规则 (UG / EG) 重新引入量词

本节任务: 掌握四大量词规则, 打通形式证明的最后一公里。

全称指定规则 (US) 与 全称推广规则 (UG)

PART 2

2.1 全称量词规则:US 与 UG

1. 全称指定规则 (US)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$$

内核:全体对象都成立,则论域中任意特定个体 c (常项或任意变项) 必然成立。

限制条件

代入 c 时不得落入其他量词辖域,避免变元捕获冲突。

2. 全称推广规则 (UG)

$$A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$$

内核:若 $A(x)$ 对任意选取、无任何特殊预设的 x 都成立,则全称命题成立。

限制条件

x 不能是 IS 引入的特定常项,也不能依赖含 x 自由出现的前提假设。

存在指定规则 (IS) 与 存在推广规则 (EG)

PART 3

3. 存在指定规则 (IS)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

内核:已知存在某客体满足条件,就指定一个新名 c 代表该对象。

严格铁律(最易错考点!)

c 必须是推导序列中从未出现过的全新个体常项!

4. 存在推广规则 (EG)

$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

内核:只要抓到一个典型对象 c 满足条件,存在性命题即告成立。

直观:见微知著,一例成真。

方向总结:US / IS 消量词(脱壳),UG / EG 加量词(戴帽)。

3.2 四大量词规则两大陷阱(避坑指南)

陷阱 1: IS 滥用旧常项(偷换概念)

已知: $\exists xP(x)$ (有奇数) 且 $\exists xQ(x)$ (有偶数)。

1. 由 $\exists xP(x)$ 用 IS 设 $P(a)$ (a 是奇数)
2. 错误: 由 $\exists xQ(x)$ 又设 $Q(a)$
 $\Rightarrow a$ 既奇又偶, 荒谬!

正解: 第二次必须换用全新符号, 设 $Q(b)$!

陷阱 2: 次序颠倒(先 IS 后 US)

前提同时含 $\exists xP(x)$ 与 $\forall xQ(x)$:

1. 先对 $\exists$ 用 IS 引入新常项 c : 得 $P(c)$
2. 再对 $\forall$ 用 US 特化为该 c : 得 $Q(c)$

黄金准则: 先 IS 后 US。若先用 US 占用 c , IS 将无法再使用同一 c !

苏格拉底三段论严格 证明与混合推理大题

PART 4

4.1 例 2-4: 苏格拉底三段论的严格形式证明

题: 构造下列推理的形式证明

前提: $\forall x (M(x) \rightarrow D(x)), M(s)$

结论: $D(s)$

思考方向: 第一步用哪条规则脱去 $\forall$ 外壳、以谁代入 x ? 得到蕴涵式后如何与前提 $M(s)$ 衔接出结论?

4.1 例 2-4:形式推导序列

证明:构造推导序列如下:

步骤	公式	依据
(1)	$\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$	前提引入 (P)
(2)	$M(s) \rightarrow D(s)$	(1) 全称指定 (US), 以 s 代 x
(3)	$M(s)$	前提引入 (P)
(4)	$D(s)$	(2)(3) 分离规则 (MP)

千古名题,严格形式证明完毕! ■

路线复盘:US 脱壳($1 \rightarrow 2$) $\Rightarrow$ MP 代数推演($2, 3 \rightarrow 4$),无需再戴回量词。

4.2 例 2-5:一阶混合推理综合大题

题:构造下列推理的形式证明

前提: $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x)$

结论: $\exists x Q(x)$

思考方向:按黄金准则应先处理 $\exists$ 还是 $\forall$? 新常项 c 如何与 $\forall$ 前提联动? 最后一步如何戴回存在量词?

4.2 例 2-5:形式推导序列

证明:构造推导序列如下:

步骤	公式	依据
(1)	$\exists xP(x)$	前提引入 (P)
(2)	$P(c)$	(1) 存在指定 (IS), 引入全新常项 c
(3)	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	前提引入 (P)
(4)	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(3) 全称指定 (US), 以 c 代 x
(5)	$Q(c)$	(2)(4) 分离规则 (MP)
(6)	$\exists xQ(x)$	(5) 存在推广 (EG)

证毕。 ■

路线复盘:先 IS 脱壳(防 c 冲突) $\Rightarrow$ US 联动 $\Rightarrow$ MP 推进 $\Rightarrow$ EG 戴帽收尾。

从命题演算到一阶 逻辑的知识大一统

PART 5

第一章:命题逻辑

- 命题、真值与五大联结词
- 真值表方法与公式三大分类
- 16 组基本等值式与等值演算
- 极小 / 极大项与主范式 (PDNF / PCNF)
- 9 大自然推理规则与 CP / IP 法

第二章:一阶逻辑

- 个体词、谓词与量词 ($\forall, \exists$)
- 符号化黄金法则与多重量词顺序
- 量词辖域、约束 / 自由变元与解释
- 量词等值律与前束范式 (PNF)
- 四大量词推理规则 (US, UG, IS, EG)

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。