

第1讲行列式的定义

第一章行列式



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

定义:二阶行列式(2×2 方阵数表)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2 行 2 列(行数 = 列数 = 2), 口诀: **主减副**。

定义:三阶行列式(3×3 方阵数表)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\text{正项}} - \sum_{\text{负项}}$$

3 行 3 列(行数 = 列数 = 3), 对角线法则(3 正 3 负)。

注意:高频致命陷阱:对角线法则不可外推

对角线法则(画斜线相乘)仅适用于 2 阶与 3 阶行列式!

4 阶行列式定义共包含 $4! = 24$ 项, 强行画斜线仅有 8 项, **严禁用于 4 阶及以上!**

定义： n 阶行列式结构定义

由 n^2 个元素构成的正方形数表 (行数 = 列数 = n) :

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

由不同行、不同列 n 个元素乘积组成, 共包含 $n!$ 项代数项。

思考：工科核心：理解“排他性”

- 无需死抠逆序数：重在应用，核心掌握位置排他性；
- 行锁定列：某行锁定某列后，其余各行绝不能复选该列！
- 定向抓取时，利用零元素能瞬时排除绝大部分展开项。

注意：高频避坑：行列式与矩阵的本质区别

- 行数绝对等于列数：行列式必须为方阵 ($n \times n$)，绝无 2×3 等非方阵行列式；
- 数值 vs 数表：行列式 $|A|$ 经计算是一个确定的数值 (标量)；矩阵 $[A]$ 允许行数 $\neq$ 列数，是一张数表。

定理:主对角与三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

主对角线上方或下方元素全为 0, 行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积。

注意:方法适用边界警示

对角线法则(沙路法则)仅在 2 阶与 3 阶有效! 4 阶及更高阶行列式, 核心思路是**利用初等行变换化为三角形行列式**, 绝不可画斜线硬乘。

定理:副对角(次对角)线行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

公式: $D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$ 。

题:典型例题 1-1-1:二阶与三阶行列式计算

计算下列行列式的值:

1. $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$

2. $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

破题切入点剖析:

- (1) 二阶行列式:标准“主对角乘积减去副对角乘积”;
- (2) 三阶行列式:既可用对角线法则硬算,也可**敏锐观察各行成等差数列**的特征,通过初等行做差产生相同行实现口算!

【规范解答】

1. $D_2 = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$ 。

2. 解法一(对角线法则):

$$\begin{aligned} D_3 &= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 \\ &\quad - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 15 + 24 + 24 - 27 - 20 - 16 = 0 \end{aligned}$$

解法二(行做差秒杀): $r_2 - r_1, r_3 - r_2$ 后第 2、3 行均为 $(1, 1, 1)$, 两行完全相同, 故 $D_3 = 0$ 。

注意: 对角线法则避坑

- 3 阶对角线展开共有 **6 项** (3 正 3 负), 极易在乘积或负号上粗心出错;
- **优先观察结构**: 若各行成等差数列, 做差后极易出现相同行或零行;
- 严禁将对角线法则套用于 4 阶行列式!

题: 典型例题 1-1-2: 对角展开项的符号判定

计算 2025 阶次对角 (副对角) 行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & 2 & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ 2025 & & & & \end{vmatrix}_{2025 \times 2025}$$

结构与规律探究:

- 非零展开项仅有唯一一条副对角线乘积: $1 \times 2 \times \cdots \times 2025 = 2025!$ 。
- 核心难点: 通式中的符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 在 $n = 2025$ 时到底是正还是负?

【规范解答】由 n 阶副对角线行列式计算公式:

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

代入 $n = 2025$:

$$D = (-1)^{\frac{2025 \times 2024}{2}} \cdot 2025! = (-1)^{2025 \times 1012} \cdot 2025!$$

因为指数 2025×1012 含有偶数因子 1012, 指数必为**偶数**:

$$(-1)^{\text{偶数}} = +1$$

故该行列式的值为:**2025!**。

注意: 副对角符号周期规律

指数 $\frac{n(n-1)}{2}$ 具有模 4 周期性:

$n \pmod{4}$	$\frac{n(n-1)}{2}$ 奇偶	符号
$n = 4k, 4k + 1$	偶数	+1
$n = 4k + 2, 4k + 3$	奇数	-1

本题 $2025 = 4 \times 506 + 1 \implies$ 恒为正号!

题:典型例题 1-1-3:三角行列式求值与方程求解

求解下列特殊结构行列式:

$$(1) \text{ 解方程: } D_1 = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 5 \\ 0 & x-2 & 3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0; \quad (2) \text{ 计算: } D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

审题与结构观察:

- (1) D_1 主对角线下方的元素全为 0, 属于标准的主对角上三角形行列式, 其值恒等于什么?
- (2) D_2 副对角线上方的元素全为 0, 属于副三角形行列式, 其值与副对角线元素的乘积有何关系? 注意符号因子!

【规范解答】

1. 主对角上三角行列式求值:

上三角行列式等于主对角线上所有元素的连乘积:

$$D_1 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

直接解得方程的三个根为:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

2. 4 阶副三角行列式求值:

副三角形行列式的值为副对角线乘积乘符号因数 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 。此处 $n = 4$:

$$\begin{aligned} D_2 &= (-1)^{\frac{4 \times 3}{2}} \times (2 \times 1 \times 3 \times 2) \\ &= (-1)^6 \times 12 = (+1) \times 12 = 12 \end{aligned}$$

注意: 三角行列式速算心法

- **主三角(上/下):** 一侧全为 0, 直接连乘主对角线, **符号恒为正!**
- **副三角(上/下):** 另一侧全为 0, 连乘副对角线, 附带符号因数 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 。
- 阶数 $n = 4$ 时符号为 $+1$; 阶数 $n = 3$ 时符号为 -1 。

微测 1: 法则边界与结构形态

判断正误：

1. 4 阶行列式可画斜线相加减；
2. 存在 2×3 阶的行列式。

注意：解析

两项均错误 $\times$ 。

- (1) 4 阶含 24 项，画斜线仅 8 项；
- (2) 行列式必须 **行数 = 列数**，非方阵绝无行列式！

微测 2: 次对角线符号指数

计算 3 阶与 4 阶次对角全 1 行列式的正负号：

$$D_3 = (-1)^{\frac{3 \times 2}{2}} = \underline{-1} ;$$

$$D_4 = (-1)^{\frac{4 \times 3}{2}} = \underline{+1} .$$

注意：解析

模 4 周期。

指数为 3 $\implies$ 奇数负号；

指数为 6 $\implies$ 偶数正号。

第一讲核心知识方法图谱

- **核心形态**: 行数恒等于列数 (方阵数表, 结果为标量);
- **基础计算**: 二阶主减副、三阶对角线法则 (防漏项);
- **做差秒杀**: 等差数列行做差直接制造相同行, 秒出 0;
- **特殊形态**: 主对角三角行列式值为主对角积;
- **副对角通式**: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 模 4 周期规律。

核心题型能力过关

- **题型 1**: 二阶行列式交叉相乘计算;
- **题型 2**: 三阶行列式对角线法则与做差速算;
- **题型 3**: 高阶次对角线行列式及其符号确定;
- **题型 4**: 三角行列式直接求值与方程求解。

定义:全排列与逆序数

由 $1, 2, \dots, n$ 组成的数组称为 n 级排列。

- **逆序**:排在前面却大于后面的数对;
- **逆序数** $N(p_1 \dots p_n)$:逆序对总数;
- 偶数称**偶排列**, 奇数称**奇排列**。

定义:严格代数定义式

$$D = \sum_{p_1 \dots p_n} (-1)^{N(p_1 \dots p_n)} a_{1p_1} \dots a_{np_n}$$

定理:任意一次对换, 逆序数奇偶性必改变。

注意:工科说明:课后习题与期末考题不作手算要求

本节内容为纯数学严格定义补充, 供考研或深化理解参考。工科课程重在矩阵运算与行列式性质, 习题与考试不涉及孤立手算逆序数。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。