

第2讲 1.3 行列式的性质

第一章 行列式



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

定义:三大保持与变号性质

- **转置不变:** $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ (行与列地位完全对等)。
- **对换变号:** 互换两行(列), 行列式反号:
 $r_i \leftrightarrow r_j \implies D_1 = -D$
- **倍加不变(核心消元):** 某行乘 k 加到另一行:
 $r_i + kr_j \implies D_1 = D$

定义:数乘与成比例性质

- **单行提公因式:** 某一行乘 k :
 $r_i \times k \implies D_1 = kD$
- **成比例为零:** 两行相同或成比例, 则 $D = 0$ 。
- **行(列)可拆性:** 某一行(列)为两项和, 可拆为两行列式之和。

注意:高频失分警示:全体矩阵数乘 vs 行列式提公因式

若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $|\lambda \mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}|$ (每一行各提一个公因子 λ)!

切记: $\lambda |\mathbf{A}|$ 仅代表行列式的某单一行(列)乘以 λ 。

定理:列向量行列式三大运算规律

记 $D = |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n|$:

■ 对换变号:

$$|\alpha_2, \alpha_1, \dots| = -|\alpha_1, \alpha_2, \dots|;$$

■ 标量数乘:

$$|k\alpha_1, \alpha_2, \dots| = k|\alpha_1, \alpha_2, \dots|;$$

■ 消元不变:

$$|\alpha_1 + k\alpha_2, \alpha_2, \dots| = |\alpha_1, \alpha_2, \dots|。$$

定理:列向量多项线性组合拆分

若某列为两向量之和,可拆为两式:

$$|\alpha, \beta_1 + \beta_2| = |\alpha, \beta_1| + |\alpha, \beta_2|$$

技巧: 拆分后利用两列相同为 0 或列对换化简。

思考:工科思维:把列向量视作“整体变量”

无需展开具体坐标! 直接运用初等变换的“倍加消元”与“互换变号”,即可将复杂的向量线性组合行列式极速化简为标准行列式。

定理:奇数阶反对称矩阵的行列式恒为 0

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵。若满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, 则称 $\mathbf{A}$ 为反对称矩阵。
两边取行列式:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T| = |-\mathbf{A}| = (-1)^n |\mathbf{A}|$$

当 n 为奇数时, $(-1)^n = -1$, 则 $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}| \implies 2|\mathbf{A}| = 0 \implies |\mathbf{A}| = 0$ 。

注意:反对称矩阵的外观特征

- 主对角元全为 0 (因 $a_{ii} = -a_{ii} \implies a_{ii} = 0$);
- 关于主对角线对称位置的元素互为相反数: $a_{ij} = -a_{ji}$ 。

注意:秒杀考点警示

奇数阶反对称行列式必为 0!
但偶数阶反对称行列式一般不为 0 (通常为某个完全平方数), 切勿死记“反对称全为 0”。

题:典型例题 1-2-1:初等行变换大数消元求值

计算 3 阶行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 101 & 198 & 302 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

审题与避坑警示:

- 第 2 行出现三位数 (101, 198, 302), 硬套对角线法则极其容易算错!
- 结构观察: $101 \approx 100 \times 1$, $198 \approx 100 \times 2$, $302 \approx 100 \times 3$ 。
- 消元思考: 如何用第 1 行做差消去第 2 行的“百位数”?

【规范解答】执行行变换 $r_2 - 100r_1$ 缩小数值:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 101 & 198 & 302 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

利用首行首元 1 向下消零 ($r_2 - r_1, r_3 - 2r_1$):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

二阶口算: $D = 8 - 3 = 5$ 。

注意: 初等变换通法技巧

- **大数做差缩小:** 遇到成百上千大数, 先减去基准行的百倍数;
- **首列造零降阶:** 首列出现两个 0, 直接按首列化为 2 阶;
- **提公因式联动:** 若各列含倍数 (如 $2a_{i1}, -a_{i3}$), 先提至式外再作消元。

题:典型例题 1-2-2:列向量组初等变换与消元求值

- 设 3 阶矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 且 $|\mathbf{A}| = -2$ 。
试求行列式 $D = |\alpha_3 - 2\alpha_1, 3\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2|$ 的值。

审题与解题路径:

- 题目未给出向量的具体数字坐标, 属于**纯抽象行列式性质题**。
- 第 2 列含系数 3, 能否直接提出?
- **列消元思考**: 如何利用第 2 列的 α_2 消去第 3 列的 $2\alpha_2$? 消完后又如何消去第 1 列的 $-2\alpha_1$?

【规范解答】

$$\begin{aligned} D &= |\alpha_3 - 2\alpha_1, 3\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2| \\ &= 3|\alpha_3 - 2\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2| \quad (\text{第 2 列提公因数 3}) \\ &= 3|\alpha_3 - 2\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1| \quad (c_3 - 2c_2 \text{ 消去 } 2\alpha_2) \\ &= 3|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1| \quad (c_1 + 2c_3 \text{ 消去 } -2\alpha_1) \\ &= -3|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \quad (\text{互换 } c_1, c_3 \text{ 反号}) \\ &= -3 \times (-2) = 6 \end{aligned}$$

注意：向量组行列式化简口诀

- **从单一项入手**: 第 2 列仅有 α_2 , 优先用它消其它列的 α_2 ;
- **链式消元**: 消完后第 3 列只剩 α_1 , 立刻反向消第 1 列;
- **对换必反号**: 还原标准顺序 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 需对换 1 次, 带负号!

题:典型例题 1-2-3:列向量多项线性拆分与符号对齐

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是 4 维列向量, 且已知 4 阶行列式:

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m, \quad |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n.$$

试求 4 阶行列式 $D = |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2|$ 的值。

审题与解题路径:

- 第 4 列为两向量之和 $\beta_1 + \beta_2$, 第一步应运用什么性质拆分?
- 注意已知条件中第二个行列式里 β_2 位于第 3 列, 如何调换至第 4 列并确定符号?
- 待求行列式前三列为 $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$, 需要几次列对换才能还原为标准顺序 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$?

【规范解答】

1. 对齐已知条件中的向量顺序:
交换第 3、4 列反号:

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| = -|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = -n$$

2. 按最后一列线性拆分待求式:

$$D = |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2|$$

3. 交换第 1、3 列还原标准前三列顺序(带负号):

$$\begin{aligned} D &= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| \\ &= -(m) - (-n) = n - m \end{aligned}$$

注意: 列可拆性与列对换心法

- **单列拆分:** 某列为加和时仅拆该列, 其余各列保持不动;
- **单次互换变负号:** 交换任意两列(如 $c_1 \leftrightarrow c_3$), 式前必乘 -1 ;
- **提公因式与消元综合:** 若遇到含倍数矩阵如 $|2\alpha_1, 3\alpha_2 - \alpha_1, -\alpha_3|$, 各列独立提公因子后化简即可秒杀。

微测 1: 反对称矩阵行列式

设 $\mathbf{A}$ 为 5 阶反对称矩阵 (即 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$), 则 $|\mathbf{A}| = \underline{0}$ 。

注意: 解析

答案为 0。

$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T| = |-\mathbf{A}| = (-1)^5 |\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}|$ 。
故 $2|\mathbf{A}| = 0 \implies |\mathbf{A}| = 0$ 。奇数阶反对称行列式必为 0!

微测 2: 矩阵数乘行列式

设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵, 且 $|\mathbf{A}| = 2$, 则 $|-2\mathbf{A}| = \underline{-16}$ 。

注意: 解析

答案为 -16。

$|-2\mathbf{A}| = (-2)^3 |\mathbf{A}| = -8 \times 2 = -16$ 。
每行均提公因子 -2, 共提出 3 个因子!

本讲核心知识方法图谱

- **初等变换三大法宝**: 倍加不变(造零主力)、对换变号、倍乘提因式;
- **大数消元秘籍**: 相近数行倍做差, 大数变小(例 1-2-1);
- **列向量定向消元**: 从单一列入手定向消除混合项(例 1-2-2);
- **多项列拆分与对齐**: 保持其余列不变, 利用列对换调正负号(例 1-2-3);
- **方阵数乘全局金律**: $|\lambda \mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}|$ 。

核心题型解题能力清单

学完本讲具备的解题能力:

- **大数行列式求值**: 利用行做差迅速化为小整数或三角形;
- **矩阵数乘与线性组合提因式**: 熟练拆提单行与全矩阵系数;
- **抽象向量组初等列变换**: 熟练通过列消元和列对换化为已知式;
- **奇数阶反对称矩阵特征**: 直接套用公式判零。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。