

第3讲 1.4 行列式按行 (列) 展开与计算方法

第一章 行列式



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

定义: 余子式与代数余子式定义

在 n 阶行列式 D 中:

- **余子式** M_{ij} : 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列后留下的 $n-1$ 阶行列式。
- **代数余子式** A_{ij} : 在余子式前附带符号因数: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 。

定义: 正负符号棋盘法则

$(-1)^{i+j}$ 的符号分布如同棋盘:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

规律: 主对角线恒为正 ($i+j=2i$ 为偶数); 相邻元素符号必相反。

注意: 命题陷阱: 余子式与对应元素大小完全无关

M_{ij} 与 A_{ij} 的值仅取决于该元素所处的位置 (划行划列), 与元素 a_{ij} 本身大小完全无关! 即便 $a_{ij} = 0$, A_{ij} 也通常不为 0。

定理:行列式按行(列)展开基本定理

行列式等于任一行(列)各元素与其对应代数余子式乘积之和:

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

定理:代数余子式异行正交性定理

某行元素与**另一行**代数余子式乘积之和恒为 0:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}A_{ij} = 0 \quad (k \neq i)$$

本质:等价于两行相同的行列式展开!

注意:代数余子式求和构造法

求常数线性组合 $\sum_{j=1}^n c_j A_{ij}$:

绝不逐项硬算! 视为将第 i 行替换为 $(c_1, \dots, c_n)$ 后得到的新行列式直接求值。

1. 化三角形消元法

适用:无明显对称数值式。

步骤:

- 首列找/借 1 作主元;
- 首列向下清零;
- 逐阶递推化为上三角;
- 对角线乘积得结果。

2. 各行和相等全加法

适用:循环对称、对角同构。

步骤:

- 各列全加至第 1 列;
- 第 1 列提公因式 S ;
- 首列全 1 行做差化三角;
- 秒杀高阶含参式。

3. 爪形逆消与加边法

适用:爪形或各行含常数。

步骤:

- 主对角炮台逆消首行;
- 或加 1 行 1 列构造爪形;
- 行做差结合因式分解。

思考:计算决策总纲:审题优先于计算

面对高阶行列式,切勿盲目消元!先观察:有无公和?是否爪形?能否降阶?选对模型,3步之内必出答案。

题:典型例题 1-3-1:特殊稀疏行列式展开求值

计算 n 阶行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

审题与展开决策:

- 观察第 n 列(或第 n 行):除右下角元素 a_n (即 a_{nn})外,其余全为 0!
- 展开定理优势:按第 n 列展开,展开式中其余项皆为 0,只保留 $a_n A_{nn}$ 一项!
- 划去第 n 行第 n 列后,余子式 M_{nn} 呈现何种经典形态?

【规范解答】

按第 n 列展开, 仅第 n 行元素非零:

$$D = (-1)^{n+n} a_n M_{nn} = a_n M_{nn}$$

其中 M_{nn} 为划去第 n 行第 n 列后的 $n-1$ 阶纯副对角行列式:

$$M_{nn} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

套用 $n-1$ 阶副对角线公式:

$$D = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

注意: 展开降阶实战口诀

- 哪里零多按哪展: 零越多, 展开计算量越小;
- 唯一定点降维: 若某行(列)仅有 1 个非零元, 展开瞬间降一阶!
- 代数符号注意:
 $(-1)^{n+n} = +1$; 剩余副对角式阶数是 $n-1$, 符号指数为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 。

题: 典型例题 1-3-2: 余子式求值与构造新行列式法

已知 4 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

试求: (1) $-M_{41} + 2M_{42} - 3M_{43} - 2M_{44}$ 的值; (2) $-A_{41} + A_{42} - 2A_{43} + A_{44}$ 的值。

审题与解题突破口:

- 第 4 行有 4 个余子式, 若逐个算 3 阶行列式, 计算量极其庞大!
- 代数余子式转化: $A_{4j} = (-1)^{4+j}M_{4j}$ 。注意各列符号:
 $A_{41} = -M_{41}, A_{42} = M_{42}, A_{43} = -M_{43}, A_{44} = M_{44}$ 。
- 核心杀招: 能否将这两式转化为“将第 4 行替换为特定行”的新行列式?

【规范解答】

1. 求解第 (1) 式:

换为代数余子式:

$$\text{原式} = A_{41} + 2A_{42} + 3A_{43} - 2A_{44}.$$

等价于将原行列式第 4 行替换为 $(1, 2, 3, -2)$ 。

此时新式第 4 行与第 2 行**完全相同**, 立得:**0**。

2. 求解第 (2) 式:

原式等价于将第 4 行替换为 $(-1, 1, -2, 1)$ 。

新式第 3 行仅 $a_{32} = -3 \neq 0$, 按第 3 行展开:

$$\begin{aligned} D' &= (-3)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times (-2) = -6 \end{aligned}$$

注意: 构造新行列式法真谛

- **余子式换符号**: 先由 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 化为代数余子式;
- **替换该行**: 系数 $(c_1, \dots, c_n)$ 作为新行元素;
- **高频考点**: 系数若与已有行相同或成比例, 立得 0 (正交性)。

题:典型例题 1-3-3:代数余子式展开与正交联立求参

已知四阶行列式 D 的第 2 行元素依次是 $2, -4, 6, 11$;

■ 第 2 行元素的代数余子式依次为 $3, 2, 1, -4$;

第 3 行元素的代数余子式依次为 $2, 3, 4, x$ 。

试求:(1) 行列式 D 的值; (2) 未知数 x 的值。

审题与解题路径:

- (1) 第 2 行元素与其自身的代数余子式对应相乘求和, 根据**按行展开定理**, 其值为何?
- (2) 第 2 行元素与**第 3 行**代数余子式对应相乘求和, 根据**异行正交定理**, 其值恒等于什么?

【规范解答】

1. 求行列式 D 的值(同行相乘展开):
由按行展开定理, 第 2 行元素与其代数余子式乘积和等于 D :

$$D = 2(3) + (-4)(2) + 6(1) + 11(-4) = -40$$

2. 求参数 x 的值(异行相乘正交为 0):
第 2 行元素与第 3 行代数余子式正交:

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} + a_{24}A_{34} = 0$$

代入数据: $2(2) + (-4)(3) + 6(4) + 11x = 0$
即 $16 + 11x = 0 \implies x = -\frac{16}{11}$ 。

注意: 展开与正交双生定理

- 同行乘积: $\sum_j a_{ij}A_{ij} = D$ (得原行列式值);
- 异行乘积: $\sum_j a_{ij}A_{kj} = 0$ (正交必为 0);
- 考试常以“求待定参数”形式考查正交性, 直接列方程秒解。

题:典型例题 1-3-4:4 阶数值行列式化三角形法

计算 4 阶行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

审题与消元策略:

- 第 1 行首元为 2, 若直接拿 2 消去下方元素, 会出现繁琐分数;
- 第 2 行首元为 1, 第 4 行首元亦为 1, 第 3 行首元已然为 0!
- **最佳起手式:** 互换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ (注意带负号!), 获得天然主元 1。

【规范解答】对换 $r_1 \leftrightarrow r_2$ (反号):

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 - 2r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

第 4 行减第 2 行, 再借第 3 行造 1 ($r_2 - 3r_3$):

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

化为标准上三角形后对角相乘, 最终得: $D = 27$ 。

注意: 消元避坑指南

- **对换必反号**: 换行时负号千万不能忘;
- **借行造 1**: $7 - 3 \times 2 = 1$, 拼出新主元 1;
- 一旦化为三角形, 主对角相乘即为最终值。

题: 典型例题 1-3-5a: 4 阶循环行列式

计算 4 阶循环行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

注意: 特征识别与杀招

各行元素之和恒为 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$!

标准杀招: 全加首行提公因式, 做差瞬间化为上三角。

【规范解答】

第 2, 3, 4 行全加到第 1 行并提 10:

$$D = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

各行做差 $r_i - a_{i1}r_1$:

$$D = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

继续化为上三角后, 主对角相乘:

$$D = 10 \times 16 = 160。$$

题: 典型例题 1-3-5b: n 阶含参矩阵

计算 n 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & k & k & \cdots & k \\ k & 1 & k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & k & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

注意: 结构洞察

每一行均含 1 个 1 和 $n-1$ 个 k 。
行和全为 $S = 1 + (n-1)k$ 。

【规范解答】

所有列全加到第 1 列并提公因子:

$$D = [1 + (n-1)k] \begin{vmatrix} 1 & k & \cdots & k \\ 1 & 1 & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

各行做差 $r_i - r_1 (i \geq 2)$:

$$D = [1 + (n-1)k] \begin{vmatrix} 1 & k & k & \cdots & k \\ 0 & 1-k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-k \end{vmatrix}$$

主对角相乘: $D = [1 + (n-1)k](1-k)^{n-1}$ 。

题: 典型例题 1-3-6a: n 阶爪形行列式

设 $a_i \neq 0 (i = 2, \dots, n)$, 计算:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

注意: 炮台逆消战术

第 i 行主对角元 a_i 为炮台, 执行 $r_1 - \frac{1}{a_i} r_i$
直接消去第 1 行所有爪尖 1!

【规范解答】

执行行变换 $r_1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} r_i$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

瞬间化为下三角形行列式!

主对角线元素连乘:

$$D_n = \left(a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} \right) a_2 a_3 \cdots a_n$$

题: 典型例题 1-3-6b: 加边升阶法

计算 n 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 + a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n + a_n \end{vmatrix}$$

注意: 加边升阶构造法

增加第 0 行与第 0 列: 首元为 1, 第 0 行放 x_j , 首列放 0。
做差转化为标准爪形!

【规范解答】

构造 $n + 1$ 阶行列式并做差化爪形:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 + a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n + a_n \end{vmatrix}$$

各行减第 0 行后套爪形逆消公式:

$$D = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) a_1 a_2 \cdots a_n$$

微测 1:代数余子式正交性

四阶行列式 D 中, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24} = \underline{0}$ 。

注意:解析

恒等于 0。

第 1 行元素与第 2 行代数余子式相乘, 异行相乘必为 0! 千万不要误算为 D 。

微测 2:各行和相等特征

n 阶行列式每行元素之和均为常数 c , 则 D 的一个必含公因子为 c 。

注意:解析

将所有列加到第 1 列, 第 1 列各元素全为 c , 提出公因子 c 即可。

本讲核心知识方法图谱

- **代数余子式定义**: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 符号看棋盘, 值与 a_{ij} 无关;
- **单非零元展开**: 某行(列)仅 1 个非零元, 直接展开瞬间降阶;
- **展开与正交**: 同行乘积得 D , 异行乘积恒为 0;
- **构造新行列式法**: 代数余子式线性求和 $\rightarrow$ 替换对应行直接算;
- **三大高阶算法**: 化三角形消元、行和相等全加提公因式、爪形炮台逆消元与加边法。

核心题型解题能力清单

学完本讲具备的解题能力:

- **稀疏展开降阶**: 抓唯一非零元直接降维计算;
- **余子式与展开求值**: 熟练划行划列与代数余子式转化;
- **正交性求参**: 根据异行乘积为 0 列方程极速求解;
- **4 阶消元实战**: 借 1 造 1, 零分数化上三角;
- **n 阶含参行列式通解**: 行和全加与爪形公式秒杀。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。