

第4讲 1.5 范德蒙与拉普拉斯分块 + 1.6 克拉默法则

第一章 行列式



厦门大学嘉庚学院

XIAMEN UNIVERSITY TAN KAH KEE COLLEGE

定理: 范德蒙德行列式标准形态

由 n 个数 $x_1, \dots, x_n$ 构成的行列式:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

各差项连乘: $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ 。

定义: 结构特征与变形识别

- **转置不变**: 列连续幂次或行连续幂次均成立;
- **首项为 1**: 底数的 0 次方全为 1;
- **因式连乘**: 大下标减小下标 $(x_j - x_i)$;
- **提公因子转化**: 若幂次从 1 开始, 先提首项因式化为标准型。

注意: 避坑警示: 差项顺序绝对不能乱

必须是“大标减小标”: $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdots$ 。顺序颠倒一次就会多出一个负号!

定理:主对角分块三角矩阵

设 $\mathbf{A}$ 为 m 阶方阵, $\mathbf{B}$ 为 n 阶方阵:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

记忆:主对角分块符号为正,直接拆乘!

定理:副对角分块三角矩阵

设 $\mathbf{A}$ 为 m 阶方阵, $\mathbf{B}$ 为 n 阶方阵:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

关键: 副对角分块必须附加符号因子 $(-1)^{mn}$!

注意:本质前提:分块子矩阵必须为方阵

拉普拉斯分块公式仅在 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 均为方阵 (行数等于列数) 时成立! 若子块不是方阵, 绝对不能拆分为两块行列式相乘。

定理:克拉默法则(方程数与未知量数相等)

对于 n 元线性方程组, 若系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组有唯一解:

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

其中 D_j 为常数列替换第 j 列所得行列式。

定理:齐次线性方程组非零解判据

对于齐次线性方程组 $Ax = 0$:

- 只有零解 $\iff$ 系数行列式 $D \neq 0$;
- 有非零解 $\iff$ 系数行列式 $D = 0$ 。

参数讨论核心:求非零解直接令 $D = 0$!

注意:高频误区

若非齐次方程组 $D = 0$, 绝不能直接断言无解! 此时可能无解, 也可能有无穷多解。

题: 典型例题 1-4-1a: 4 阶范德蒙行列式转置计算

计算 4 阶行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$

注意: 特征识别

第 1 列为 1^k , 第 2 列为 $(-1)^k$, 第 3 列为 2^k , 第 4 列为 3^k 。

这是节点为 1, -1, 2, 3 的标准范德蒙行列式转置形态!

【规范解答】

行列式转置值不变, D 等价于由节点:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3$$

构成的 4 阶范德蒙行列式:

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_j - x_i)$$

大标减小标依次展开:

$$\begin{aligned} D &= (-1 - 1)(2 - 1)(3 - 1) \\ &\quad \times (2 - (-1))(3 - (-1))(3 - 2) \\ &= (-2) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 = -48 \end{aligned}$$

题: 典型例题 1-4-1b: 公因式提取与范德蒙构造

计算 4 阶行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

思考: 构造思想

行内元素分别为 2, 3, 4 的幂次, 但底数次幂从 1 次方开始。提取每行首项公因子, 即可还原首行全 1 的标准范德蒙!

【规范解答】

第 2 行提 4, 第 3 行提 3:

$$D = 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

右侧为节点 1, 2, 3, 4 的范德蒙行列式:

$$\begin{aligned} V_4 &= (2-1)(3-1)(4-1) \\ &\quad \times (3-2)(4-2)(4-3) = 12 \end{aligned}$$

故最终结果为: $D = 12 \times 12 = 144$ 。

题: 典型例题 1-4-2a: 主对角分块拉普拉斯展开

计算: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

【主对角分块公式 $|A||B|$ 】

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

分别交叉计算 2×2 子式:

$$D = (4 - 6) \times (6 - 4) = -4$$

题: 拓展例题: 副对角分块拉普拉斯展开

计算: $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \\ c & d & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \end{vmatrix}$

【副对角公式 $(-1)^{mn}|A||B|$ 】

此处 $m = 2, n = 2 \implies (-1)^{2 \times 2} = 1$:

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix}$$

直接交叉相乘即得:

$$D = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)。$$

题: 典型例题 1-4-2b: 稀疏交叉结构重排化分块对角

4 阶行列式的值等于 (A):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

(A) 4 (B) -4 (C) 2 (D) -2

注意: 结构特征分析

内圈 2×2 与外四角 2×2 互不干扰, 交换行与列可化为纯分块对角!

【解法一: 行列对换化分块对角】

互换第 2、4 列 (变号一次), 再互换第 2、4 行 (变号一次):

$$D = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

由主对角分块公式直接口算:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-2) \times (-2) = 4$$

【解法二: 按第 1 行展开】

$$D = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{14} = -8 + 12 = 4。$$

题: 典型例题 1-4-3: 含参齐次线性方程组非零解讨论

齐次方程组
$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0 \\ x + ky + 2z = 0 \\ kx + y + kz = 0 \end{cases},$$
 若有非零解, 求 k ; 若只有零解, 求 k 。

注意: 判据法则

n 元齐次方程组有非零解 $\iff D = 0$;
只有零解 $\iff D \neq 0$ 。

【规范解答】

系数行列式 $D \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & k+2 \end{vmatrix}:$

$$D = (k+2) \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)(k+1)$$

- 有非零解 $\iff D = 0$:
 $k = -2$ 或 $k = 1$ 或 $k = -1$;
- 只有零解 $\iff D \neq 0$:
 $k \neq -2$ 且 $k \neq 1$ 且 $k \neq -1$ 。

微测 1:分块矩阵行列式等式辨析

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 n 阶方阵, 下列等式正确的是 (D):

(A) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$

(B) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$

(C) $\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

(D) $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

注意:辨析

行列式对矩阵加减没有分配律; 副对角分块差 $(-1)^{n^2}$; (D) 为分块下三角, 正确!

微测 2:克拉默法则适用前提

对于 3 个未知量、4 个方程的线性方程组, 能否直接应用克拉默法则?

不能直接使用

注意:辨析

行列式的绝对本质: 行数 = 列数!

克拉默法则要求系数矩阵必须为方阵 ($m = n$)。当方程数与未知量数不相等时, 系数矩阵不是方阵, 无法计算行列式。

第4讲核心方法能力清单

掌握本讲应达到的核心能力：

- **范德蒙转置计算**：识别转置幂次节点 (例 1-4-1a)；
- **范德蒙构造**：提取多项公因式还原首行全 1 (例 1-4-1b)；
- **分块展开**：主对角与副对角拉普拉斯展开 (例 1-4-2a)；
- **行列重排**：行列对换将稀疏式化为分块对角 (例 1-4-2b)；
- **克拉默判据**：齐次非零解与行列式判零 (例 1-4-3)。

第一章全章方法演进脉络

四讲方法体系完备闭环：

- **第1讲 1.2 行列式定义**：方阵特征、二三阶对角线法则、次对角项符号；
- **第2讲 1.3 行列式性质**：初等变换、大数倍加消元、向量列拆分与反对称；
- **第3讲 1.4 展开与计算**：代数余子式、异行正交性、化三角形法、各行和全加法与爪形逆消；
- **第4讲 1.5/1.6 克拉默法则**：范德蒙速算、分块展开与方程组解的判定。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

思考: Questions & Answers

“学贵善疑, 逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料将持续同步至课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。