

第5讲2.1矩阵的运算

第二章 矩阵及其运算

一、矩阵的定义与线性运算

- 矩阵本质: $m \times n$ 矩形数表 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$;
- 同型线性运算: $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$, $k\mathbf{A} = (ka_{ij})_{m \times n}$ 。

二、乘法规则与形状匹配

- 前列等于后行: $\mathbf{A}_{m \times k} \mathbf{B}_{k \times n} = \mathbf{C}_{m \times n}$;
- 行乘列点积: $c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}$ 。

易混警示 数乘矩阵每项提 k ; 数乘行列式 $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$, 每行只提一个!

题: 典型例题 2-1-1: 矩阵乘法具体计算

计算下列矩阵乘法:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 形状检验: $(3 \times 3) \times (3 \times 2) \rightarrow 3 \times 2$ 矩阵;
- 思考方向: 乘积的第 i 行第 j 列元素由左矩阵第 i 行点乘右矩阵第 j 列生成。

例 2-1-1:规范解答与方法归纳

一、规范解答

逐行与右侧各列作点积：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 0 + 1 \times 1 & 1 \times (-1) + 2 \times 1 + 1 \times 2 \\ 2 \times 2 + (-1) \times 0 + 3 \times 1 & 2 \times (-1) + (-1) \times 1 + 3 \times 2 \\ 4 \times 2 + 0 \times 0 + 5 \times 1 & 4 \times (-1) + 0 \times 1 + 5 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 3 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}.$$

二、做题通法

- **定位法**:左取左阵第 i 行、右取右阵第 j 列,对应相乘再求和;
- **零元素加速**:遇 0 直接跳过对应项。

例 2-1-2:行乘列(内积)与列乘行(外积)

题:典型例题 2-1-2:内积与外积对比计算

计算下列两个向量的乘积:

1. $[1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};$

2. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [3 \quad 4]。$

例 2-1-2:规范解答与形态对比

一、规范解答

■ 行乘列(内积,标量): $(1 \times 3) \times (3 \times 1) \rightarrow 1 \times 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 2 = 10$$

■ 列乘行(外积,矩阵): $(3 \times 1) \times (1 \times 2) \rightarrow 3 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 4 \\ 1 \times 3 & 1 \times 4 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

二、核心认知本质

外积 $\alpha\beta^T$ 各行列均成比例(秩为 1 矩阵);内积 $\alpha^T\beta$ 为标量纯数,可作为系数任意移位。

一、乘法形态与维度突变

行乘列 $\rightarrow$ 标量纯数; 列乘行 $\rightarrow n \times m$ 秩 1 矩阵。

二、四大“反直觉”特性

- 无交换律: $AB \neq BA$;
- 零因子存在: $AB = O \nRightarrow A = O$ 或 $B = O$;
- 消去律失效: $AB = AC \nRightarrow B = C$, ($A \neq O$ 也不行), 仅 A 可逆时可消;
- 平方差失效: $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$, 仅当 $AB = BA$ 才成立。

转置穿脱 $(A + B)^T = A^T + B^T, (A^T)^T = A, (kA)^T = kA^T, (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ 。

例 2-1-3:抽象矩阵乘积化简与标量提取

题:典型例题 2-1-3:抽象矩阵乘法化简

已知 $\mathbf{X} = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right)_{1 \times n}$, 设矩阵

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} - \mathbf{X}^T \mathbf{X}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{E} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X},$$

求乘积 $\mathbf{AB}$ 。

- 结构特征: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ 为 $n \times n$ 矩阵, 但 $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ 却为标量;
- 解题钥匙: 展开乘法式, 利用矩阵结合律优先结合中间的 $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ 。

例 2-1-3:规范解答与技巧提炼

一、规范解答步骤

首先单独计算内积标量 $\mathbf{X}\mathbf{X}^\top$:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^\top = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

将 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 代入乘积展开(注意 $\mathbf{E}$ 与任何矩阵可交换):

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= (\mathbf{E} - \mathbf{X}^\top\mathbf{X})(\mathbf{E} + 2\mathbf{X}^\top\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{E} + 2\mathbf{X}^\top\mathbf{X} - \mathbf{X}^\top\mathbf{X} - 2(\mathbf{X}^\top\mathbf{X})(\mathbf{X}^\top\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{E} + \mathbf{X}^\top\mathbf{X} - 2\mathbf{X}^\top(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)\mathbf{X} \\ &= \mathbf{E} + \mathbf{X}^\top\mathbf{X} - 2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{X}^\top\mathbf{X} = \mathbf{E}.\end{aligned}$$

二、重要推论

由 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 立即可知 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 互为逆矩阵, 即 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$!

例 2-1-4: 秩 1 矩阵的高次幂速算

题: 典型例题 2-1-4: 秩 1 矩阵乘方 $\mathbf{A}^n$

已知向量 $\alpha = (1, 2, 3)^\top$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ 。设 3 阶矩阵 $\mathbf{A} = \alpha\beta$, 求 $\mathbf{A}^n$ 。

- 破题抓手: 直接展开乘方会面对极其复杂的矩阵连乘;
- 结合律转化: 写出 $\mathbf{A}^n = (\alpha\beta)(\alpha\beta) \cdots (\alpha\beta)$, 重新组合相邻括号。

例 2-1-4: 规范解答与通式归纳

一、规范解答步骤

- 第一步(计算内积标量): $k = \beta\alpha = 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 = 1 + 1 + 1 = 3$;
- 第二步(利用结合律重组求幂): $\mathbf{A}^n = (\alpha\beta)^n = \alpha \underbrace{(\beta\alpha)}_3 \cdots \beta = 3^{n-1}(\alpha\beta) = 3^{n-1}\mathbf{A}$;
- 第三步(写出具体矩阵数值):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

二、通式归纳

秩 1 矩阵 $\mathbf{A} = \alpha\beta$ (α 列、 β 行): $\mathbf{A}^n = (\beta\alpha)^{n-1}\mathbf{A}$ 。

一、单项选择快速辨析

1. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶方阵, 下列等式错误的是 (**C**):

(A) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$

(B) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(C) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$

(D) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

2. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶矩阵, 下列等式正确的是 (**D**):

(A) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

(B) $\mathbf{AB} = \mathbf{O} \implies \mathbf{A} = \mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B} = \mathbf{O}$

(C) $(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$

(D) $(\mathbf{A} + \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$

3. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 则必有 (**C**):

(A) $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B} = \mathbf{O}$

(B) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}$

(C) $|\mathbf{A}| = 0$ 或 $|\mathbf{B}| = 0$

(D) $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = 0$

要点精解: 两边取行列式 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = 0 \implies |\mathbf{A}| = 0$ 或 $|\mathbf{B}| = 0$ 。

一、知识架构速查

- 矩阵运算: 线性运算同型, 乘法前列等于后行;
- 非交换警钟: 严禁默认 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$;
- 转置穿脱: $(\mathbf{AB})^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top}$;
- 秩 1 求幂: $\mathbf{A}^n = (\beta\alpha)^{n-1}\mathbf{A}$ 。

二、课后作业

- 《作业集》第 5 讲 (第 1~8 题);
- 复盘: 抽象化简与秩 1 求幂。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料见课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。