第6讲2.2可逆矩阵

第二章矩阵及其运算

核心考点：可逆矩阵定义与因式配凑求逆

一、可逆的定义

- **定义**：若同阶方阵 $\mathbf{B}$ 使 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$，则 $\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$（唯一）；
- **单侧推双侧**：$\mathbf{AB}=\mathbf{E} \Longrightarrow \mathbf{BA}=\mathbf{E}$。

二、抽象矩阵因式配凑通法

- **因式配凑**：化为 $(\text{待求式})\cdot\mathbf{M}=\mathbf{E} \Longrightarrow (\text{待求式})^{-1}=\mathbf{M}$；
- **循环轮换**：$\mathbf{ABC}=\mathbf{E} \Longrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{CA})=\mathbf{E}$，$\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{CA}$。

警示 逆矩阵仅对方阵定义，长方形矩阵绝无逆！

例 2-2-1：矩阵多项式配凑因式求逆

题：典型例题 2-2-1：多项式配凑因式求逆

设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足矩阵方程

$$\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 4\mathbf{E} = \mathbf{O},$$

证明 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{A} + 2\mathbf{E}$ 均可逆，并分别求其逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$ 与 $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1}$。

- **破题思想**：本题无具体数值矩阵，无法求行列式或伴随；
- **因式恒等**：寻找形如 (待求式) $\cdot$ (多项式) $= k\mathbf{E}$ $(k \neq 0)$ 的结构。

例 2-2-1：规范解答与技巧提炼

一、规范解答

- **求 $\mathbf{A}^{-1}$**：移项提公因式 $\mathbf{A}$，两边除以 4：

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}+3\mathbf{E})=4\mathbf{E} \implies \mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}+3\mathbf{E}}{4}$$

- **求 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$**：十字相乘拼凑，两边除以 6：

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E})=\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}=4\mathbf{E}+2\mathbf{E}=6\mathbf{E} \implies (\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{E}}{6}$$

二、方法通则

抽象方阵求逆第一反应：**因式分解配凑**，化为 (目标) $\cdot\ \mathbf{M}=\mathbf{E}$。

例 2-2-2：多矩阵乘积求逆与循环轮换

题：典型例题 2-2-2：多矩阵连乘求逆

若设 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 均为 n 阶方阵，且满足

$$\mathbf{ABC}=\mathbf{E},$$

证明 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 均可逆，并分别求 $\mathbf{A}^{-1},\mathbf{B}^{-1},\mathbf{C}^{-1}$。

- **核心特征**：利用结合律结合前后矩阵；
- **思考关键**：方阵乘积为单位阵时，其因式能否在乘积中循环移位？

例 2-2-2：规范解答与循环轮换律

一、规范解答

同阶方阵，利用结合律重组：

- $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\mathbf{E} \implies \mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{BC}$；
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{E} \implies \mathbf{C}$ 可逆，$\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{AB}$；
- **循环轮换**：$\mathbf{XY}=\mathbf{E} \iff \mathbf{YX}=\mathbf{E}$，故 $(\mathbf{BC})\mathbf{A}=\mathbf{E}$，即 $\mathbf{B}(\mathbf{CA})=\mathbf{E}$，$\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{CA}$。

二、速记口诀

求谁的逆就把谁“拿走”，剩余因式按原顺序首尾环形相扣！

核心考点：可逆充要条件与伴随求逆口诀

一、可逆判据与伴随公式

- **充要判据**：$\mathbf{A}$ 可逆 $\iff |\mathbf{A}| \neq 0$（非奇异 / 满秩）；
- **伴随求逆**：$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$。

二、二阶速算与运算法则

二阶速算口诀“**主对调，副变号**”（$ad \neq bc$）：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。

- **穿脱法则**：$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$，$(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$，$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$；
- **同侧相乘**：$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \implies \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$（左乘！）。

例 2-2-3：二阶伴随求逆与矩阵方程求解

题：典型例题 2-2-3：二阶求逆与解矩阵方程

1. 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$；
2. 求解矩阵方程：

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

例 2-2-3：规范解答与解题步骤

一、规范解答步骤

1. $|\mathbf{A}| = 1\times 4 - 2\times 3 = -2 \neq 0$。由口诀：$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$。

2. 设系数矩阵 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，其行列式 $|\mathbf{M}| = 8 - 3 = 5 \neq 0$，故 $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$。方程两边**同时左乘** $\mathbf{M}^{-1}$：

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 3 \\ 0 & \frac{3}{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

二、警示

解方程 $\mathbf{MX} = \mathbf{B}$ 必须左乘 $\mathbf{M}^{-1}$ 得 $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$，严禁写成 $\mathbf{BM}^{-1}$！

例 2-2-4：含参矩阵方程因式分解与求解

题：典型例题 2-2-4：因式化简解矩阵方程

已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且满足矩阵方程

$$\mathbf{AX}+\mathbf{E}=\mathbf{A}^2+\mathbf{X},$$

求未知矩阵 $\mathbf{X}$。

- **破题切入**：含 $\mathbf{X}$ 的项移到等号左边，其余移到右边；
- **避坑关键**：提公因式后先检验系数矩阵可逆，切莫盲目消去！

例 2-2-4：规范解答与避坑分析

一、规范解答步骤

- **移项分解**：$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{A}^2-\mathbf{E}=(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E})$；
- **检验可逆（核心得分点）**：$\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow|\mathbf{A}-\mathbf{E}|=-1\neq 0$（可逆！）；
- **左乘逆矩阵求解**：两边左乘 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}$ 得

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}+\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

二、阅卷扣分雷区

必须先写出 $|\mathbf{A}-\mathbf{E}|\neq 0$ 确证可逆，方能消去公因式；盲目两边约分属严重逻辑跳步！

随堂微测：矩阵消去律与可逆性充要条件

一、概念深度辨析题

若由 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ 必能推出 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$，其中 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 为同阶方阵，则 $\mathbf{A}$ 应满足条件（ D ）：

(A) $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$　(B) $\mathbf{A}=\mathbf{E}$　(C) $|\mathbf{A}|=0$　(D) $|\mathbf{A}|\neq 0$

二、深度剖析

- 移项得 $\mathbf{A}(\mathbf{B}-\mathbf{C})=\mathbf{O}$；
- 仅当 $\mathbf{A}$ 可逆（即 $|\mathbf{A}|\neq 0$）时，两边才可左乘 $\mathbf{A}^{-1}$ 得到 $\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}\implies\mathbf{B}=\mathbf{C}$；
- 若仅有 $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$，由于存在非零零因子（例如 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{O}$），无法推出 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$。

本讲小结与课后作业

一、知识架构速查

- **可逆充要**：$\mathbf{A}$ 可逆 $\iff |\mathbf{A}| \neq 0$；
- **伴随求逆**：$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{*}$；二阶口诀“主对调，副变号”；
- **抽象配凑**：化为 $(\dots)\cdot\mathbf{M}=\mathbf{E}$；
- **矩阵方程**：$\mathbf{AX}=\mathbf{B} \implies \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$（同侧相乘）。

二、课后作业

- 《作业集》**第 6 讲**（第 1～6 题）；
- 复盘：因式配凑与矩阵方程求解。

课程互动与讲师主页

在线主页与课程资源

- **个人主页：**
  https://matnoble.top
- **课程专栏：**
  https://matnoble.top/courses/
- **GitHub 仓库：**
  https://github.com/MatNoble

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑，逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听！
课件最新版本与补充资料见课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。