

第7讲 2.2 可逆矩阵 + 2.3 分块矩阵

第二章 矩阵及其运算

一、伴随矩阵四大性质(设 A 为 n 阶方阵)

- 恒等式关系: $AA^* = A^*A = |A|E$;
- 行列式公式: $|A^*| = |A|^{n-1}$;
- 数乘伴随: $(kA)^* = k^{n-1}A^*$ (极高频陷阱: 指数 $n-1$);
- 伴随与逆的互换: 当 $|A| \neq 0$ 时, $A^* = |A|A^{-1}$, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$ 。

注意: 数乘提取幂次对比 (k^n vs k^{n-1})

行列式数乘提 $|kA| = k^n|A|$; 伴随数乘提 $(kA)^* = k^{n-1}A^*$!

例 2-3-1:伴随矩阵与数乘行列式综合计算

题:典型例题 2-3-1:伴随矩阵行列式求值

1. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 3 阶矩阵, 且 $|\mathbf{A}| = -2, |\mathbf{B}| = \frac{1}{2}$, 求 $\left| \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \right|$ 与 $|\mathbf{A} \mathbf{B}^*|$;
2. 设 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 且 $|\mathbf{A}| = \frac{1}{3}$, 求 $|(3\mathbf{A})^{-1} + 5\mathbf{A}^*|$ 。

一、规范解答步骤

1. 对于 3 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\left| \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \right| = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 |\mathbf{A}| \right]^{-1} = \left[\frac{1}{8} \times (-2) \right]^{-1} = -4;$$

$$\text{由 } |\mathbf{B}^*| = |\mathbf{B}|^{3-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \text{ 得: } |\mathbf{AB}^*| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}^*| = (-2) \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}。$$

2. 由 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}$ 提公因式:

$$(3\mathbf{A})^{-1} + 5\mathbf{A}^* = \frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1} + \frac{5}{3}\mathbf{A}^{-1} = 2\mathbf{A}^{-1}。$$

$$\text{两边取行列式: } |2\mathbf{A}^{-1}| = 2^3 |\mathbf{A}^{-1}| = \frac{8}{|\mathbf{A}|} = \frac{8}{1/3} = 24。$$

二、方法归纳

遇逆矩阵与伴随矩阵混合线性组合,优先用 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 统一度量为 $\mathbf{A}^{-1}$!

一、分块运算法则

以横竖线将大矩阵分块;加减、数乘、乘法规则同普通元素,乘法需前后分块匹配。

二、主对角与副对角分块求逆

设 $\mathbf{A}_1$ (m 阶)、 $\mathbf{A}_2$ (n 阶) 均可逆:

■ 主对角分块:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|;$$

■ 副对角分块(交叉对调):
$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{O} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1} \\ \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|。$$

题:典型例题 2-3-2:4 阶准对角分块运算

已知 4 阶矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

求 $\mathbf{A}^2$, $|\mathbf{A}^8|$, $\mathbf{A}^{-1}$ 。

- **结构特征:**右上角与左下角均为 2×2 零子块,为主对角准对角阵;
- **破题抓手:**化为 2×2 宏观块矩阵,各子块独立求解。

例 2-3-2:规范解答与解题步骤

一、规范解答步骤

设 $\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$, 其中 $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 。

■ 求 $\mathbf{A}^2$: $\mathbf{A}_1^2 = 25\mathbf{E}$, $\mathbf{A}_2^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^2 = \text{diag}\left(25\mathbf{E}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}\right)$;

■ 求 $|\mathbf{A}^8|$: $|\mathbf{A}_1| = -25$, $|\mathbf{A}_2| = 4 \Rightarrow |\mathbf{A}| = (-25) \times 4 = -100$ 。
故 $|\mathbf{A}^8| = |\mathbf{A}|^8 = (-100)^8 = 10^{16}$;

■ 求 $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3/25 & 4/25 \\ 4/25 & -3/25 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ 。

由准对角求逆公式: $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(\mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1})$ 。

例 2-3-3: 副对角分块矩阵的行列式与求逆

题: 典型例题 2-3-3: 副对角分块矩阵求值

已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求 $|\mathbf{A}^{10}|$ 和 $\mathbf{A}^{-1}$ 。

- **结构特征:** 主对角线上均为 2×2 零矩阵, 为典型副对角分块;
- **核心陷阱:** 注意行列式符号因子 $(-1)^{mn}$ 与求逆子块的交叉换位。

一、规范解答步骤

令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ($|\mathbf{A}_1| = 5$), $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ($|\mathbf{A}_2| = -2$)。

■ 求 $|\mathbf{A}^{10}|$: 由副对角分块公式 $|\mathbf{A}| = (-1)^{2 \times 2} |\mathbf{A}_1| |\mathbf{A}_2| = -10 \implies |\mathbf{A}^{10}| = 10^{10}$;

■ 求 $\mathbf{A}^{-1}$ (交叉求逆公式): $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1} \\ \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ 。

计算 $\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ 。

交叉拼装得: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

题:典型例题 2-3-4:列分块与公共列提取

设 4 阶矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, $\mathbf{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2)$ 且已知

$$|\mathbf{A}| = 1, \quad |\mathbf{B}| = -2,$$

求行列式 $|\mathbf{A} - 2\mathbf{B}|$ 的值。

- 观察特征: $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的前三列完全相同, 仅第四列不同;
- 破题切入: 写出 $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ 的列分块形式, 利用行列式的列可拆性与数乘公因子性质。

例 2-3-4:规范解答与技巧提炼

一、规范解答步骤

按列表示矩阵差 $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = (\alpha_1 - 2\alpha_1, \alpha_2 - 2\alpha_2, \alpha_3 - 2\alpha_3, \beta_1 - 2\beta_2) = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \beta_1 - 2\beta_2).$$

由行列式性质,从前 3 列中分别提出公因子 -1 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - 2\mathbf{B}| &= (-1)^3 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 - 2\beta_2| \\ &= -(|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2|) \\ &= -(|\mathbf{A}| - 2|\mathbf{B}|) = -[1 - 2(-2)] = -(1 + 4) = -5. \end{aligned}$$

二、方法提炼

多列相同、单列不同的矩阵加减,利用分块按列线性展开,可瞬时转化为已知行列式的线性组合!

一、单项选择快速辨析

1. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 下列等式**错误**的是(**D**):

(A) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(B) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(C) $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$

(D) $(k\mathbf{A})^* = k\mathbf{A}^*$

二、高频陷阱剖析

■ **性质 (D) 错误原由**: 根据伴随定义, $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*$ 。当 $n > 2$ 时, 因公因子漏算幂次必错;

■ **性质 (B) 正确机制**: 副对角分块求逆, 左上与右下对调求逆, 位置由左下转右上, 右上转左下。

一、知识架构速查

- 伴随性质: $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}, (k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*, \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$;
- 主对角分块: 求逆原位放, 行列式直接相乘;
- 副对角分块: 求逆对调放, 行列式乘 $(-1)^{mn}$;
- 按列分块: 公共列不动, 差异列线性拆分。

二、课后作业

- 《作业集》第 7 讲 (第 1~6 题);
- 复盘: 分块求逆口诀与伴随公式变形。

在线主页与课程资源

■ 个人主页:

<https://matnoble.top>

■ 课程专栏:

<https://matnoble.top/courses/>

■ GitHub 仓库:

<https://github.com/MatNoble>

自由交流与提问 (Q&A)

“学贵善疑,逻辑筑基”

感谢大家的专注聆听!

课件最新版本与补充资料见课程主页。

现在进入自由提问与交流时间。